Matemática en Red

Tomo II

2024

Guía docente

Números racionales
Construcción de cuadriláteros
Teorema de Thales

Nivel Primario (6.° y 7.°) y Nivel Secundario (Ciclo Básico)

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Buenos Aires Ciudad

Jefe de Gobierno
Jorge Macri

Ministra de Educación
Mercedes Miguel

Jefa de Gabinete
Julia Raquel Domeniconi

Subsecretario de Planeamiento e Innovación Educativa
Oscar Mauricio Ghillione

Subsecretaria de Gestión del Aprendizaje
María Lucía Feced Abal

Subsecretario de Gestión Económico Financiera
y Administración de Recursos
Ignacio José Curti

Subsecretario de Tecnología Educativa
Ignacio Manuel Sanguinetti

Directora de la Unidad de Evaluación Integral de la Calidad
y Equidad Educativa
Samanta Bonelli

escuela de maestros

Directora General
Viviana Edith Dalla Zorza

Colección Matemática en Red Tomo II

Desarrollo de Contenido: **Empoderamiento Docente.** Coordinación: **Daniela Reyes Gasperini.**

Revisión académica: **Karla Gómez Osalde y Daniela Reyes Gasperini.**

Autoría por capítulo: **Capítulo 1. Andrea Vergara Gómez. Capítulo 2. Karla Gómez Osalde; coautoría: Wendolyne Ríos Jarquín y Elena Martínez Díaz. Capítulo 3. Karla Gómez Osalde; coautoría: Wendolyne Ríos Jarquín y Elizabeth Marín Arceo.**

Revisión de documentos curriculares: **Paulina Salazar Cortez.**

Equipo de Comunicación

Coordinación general: **María de la Paz Amieva; Juan Martín Fernández Quintero.**

Coordinación editorial pedagógica: **María Cecilia Guerra Lage.**

Equipo Editorial de Materiales y Contenidos Digitales
Coordinación general: Silvia Saucedo.
Coordinación editorial: Marcos Alfonzo.
Asistencia editorial: Leticia Lobato.
Edición: Andrés Albornoz.
Diagramación: Laura Raptis.

Carlos H. Perette 750, 4° piso - Barrio 31 - Retiro - C1063
Ciudad Autónoma de Buenos Aires

En la elaboración de este documento se ha intentado que el lenguaje no refuerce sesgos sexo-genéricos o que promueva discriminación, desigualdad o invisibilización de personas o grupos.

Fecha de consulta de imágenes, videos, textos y otros recursos digitales disponibles en internet:
15 de julio de 2024.

ISBN 978-987-818-108-0

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Matemática en red II : guía para docentes / 1a edición para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2024.
76 p. ; 30 x 21 cm.

ISBN 978-987-818-108-0

1. Educación Primaria. 2. Educación Secundaria. 3. Matemática. I. Título.
CDD 510.712

Presentación

El programa **Matemática en Red** emerge como un espacio de colaboración y reflexión conjunta entre los y las docentes de nivel primario y secundario de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Su propósito fundamental es explorar contenidos matemáticos específicos y estrategias pedagógicas, promoviendo la articulación de la enseñanza en los momentos de pasaje de nivel.

La creación de este programa viene a dar respuesta a la conocida necesidad de mejorar los niveles de aprendizaje matemático, estableciendo como línea prioritaria el desarrollo del pensamiento matemático de las y los estudiantes, y haciendo foco en acciones que promuevan el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de manera integral.

Participarán en el programa maestras y maestros de 6.° y 7.° grado de primaria, junto con docentes de 1.° y 2.° año de secundaria que se desempeñan en escuelas de la Ciudad. La implementación del programa incluirá talleres conjuntos y otros específicos para docentes de ambos niveles, con encuentros a lo largo del año escolar. El enfoque buscará potenciar prácticas educativas que generen un aprendizaje matemático significativo y sostenible.

La metodología de trabajo se centra en la problematización del contenido matemático escolar y en cómo abordar su tratamiento en las aulas. El programa apunta a la articulación entre niveles, explorando estrategias pedagógicas que enriquezcan la práctica docente. Como parte del programa, se han desarrollado materiales específicos estructurados en capítulos, abordando contenidos matemáticos curriculares desde una perspectiva integral, que estarán disponibles en línea. Para la elaboración de estos materiales se ha partido del planteo de interrogantes cruciales como: ¿qué contenidos matemáticos han abordado los y las estudiantes en niveles educativos previos y cuáles enfrentarán en los siguientes? ¿Qué estrategias pedagógicas se potencian, introducen o consolidan durante estos niveles? Por ello, los materiales tendrán como destinatarios a docentes de los niveles primario y secundario de manera simultánea.

A corto plazo, se espera que el diálogo entre docentes de ambos niveles impulse la reflexión y se traduzca en acciones estratégicas en el aula. A largo plazo, se busca establecer una comunicación fluida entre niveles que promueva una transición educativa sin quiebres, donde las y los estudiantes experimenten un proceso de articulación coherente y consistente.

El programa aspira a fomentar la comunicación efectiva entre docentes de distintos niveles, reconociendo que esta colaboración enriquece la experiencia educativa. Al entender la matemática y su didáctica como elementos de conexión, no solo entre contenidos sino también entre niveles, se intenta contribuir a una educación matemática que continúa en la búsqueda de la coherencia y efectividad para las y los estudiantes, trascendiendo las divisiones artificiales que a veces limitan el enfoque educativo.

El título **Matemática en Red** expresa la intención de construir una red sólida de aprendizajes que conecte los niveles educativos. El programa busca crear un entorno donde la colaboración entre docentes de los niveles primario y secundario no solo sea un objetivo, sino una realidad palpable. Al tejer esta red de conocimiento, aspiramos a fortalecer la coherencia y continuidad de la educación matemática, brindando a las y los estudiantes una experiencia educativa integrada y enriquecedora a lo largo de su trayectoria escolar. **Matemática en Red** es parte de la política educativa prioritaria de mejora de aprendizajes que se propone el Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Representa un compromiso con la construcción de una comunidad de aprendizaje constante, colaborativa y continua.

Introducción

La Real Academia Española define la articulación como *la unión entre dos piezas rígidas que permite el movimiento relativo entre ellas*. Esta definición colocaría a la educación primaria y a la educación secundaria como piezas rígidas, lo cual podemos no compartir. Lo que sí compartimos es que se puede (y seguramente se necesite) permitir un movimiento relativo entre ellas. Dicho movimiento es el que nos convoca en este documento.

La transición entre la educación primaria y la educación secundaria, habitualmente, es un proceso que vivencian las y los estudiantes, no así el equipo docente (maestras, maestros, profesores y profesoras) o el equipo directivo, y tampoco los libros de texto. Existe una articulación declarada a nivel curricular, existen materiales que evidencian las progresiones entre uno y otro nivel educativo, y existen contenidos propiamente dichos que viven y se construyen en ambos niveles. Ahora bien, ¿cómo dialogan estos espacios para contribuir a la transición que viven las y los estudiantes?, ¿cuáles son los quehaceres propios del desarrollo del pensamiento matemático que pretendemos potenciar en cada uno de los años escolares?, ¿qué contenidos matemáticos se trabajan en años anteriores o posteriores al año escolar en el que me encuentro? Son preguntas que acompañan desde hace años el quehacer docente, tanto de primaria como de secundaria.

Desde el equipo académico de la Escuela de Maestros de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires nos proponemos continuar la reflexión sobre estos interrogantes a través de los cuadernos de la colección **Matemática en Red**. En este tomo se desarrollan las temáticas de *Números racionales, Construcción de cuadriláteros y Teorema de Thales* en continuidad con los contenidos abordados en el **Tomo 1**.

Cada uno de los contenidos matemáticos mencionados cuenta con cuatro apartados.

- Ubicación curricular. El objetivo es evidenciar cuándo y describir cómo se aborda el tópico matemático que se estudia de 6.° grado de primaria a 2.° año de secundaria, considerando como fuentes bibliográficas los materiales oficiales del Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

- Contextualización disciplinar. El objetivo es abordar una reflexión teórico-práctica sobre cuáles son los elementos clave que se recomienda plantear desde el desarrollo profesional docente para propiciar el aprendizaje del contenido específico y la resignificación por parte de las y los estudiantes.

- Problematización de la matemática escolar. El objetivo es exponer las ideas fuerza que pretendemos movilizar en esta propuesta para el aprendizaje del contenido matemático específico, haciendo hincapié en lo que es propio de cada año.

- ¿Cómo operativizar las ideas fuerza? El objetivo es mostrar el análisis didáctico que fundamenta la propuesta de dónde profundizar, matemáticamente hablando, en cada año escolar (desde 6.° grado de primaria hasta 2.° año de secundaria).

No obstante, invitamos a las y los lectores a acceder también a los textos referenciados, editados en años anteriores, ya que serán indispensables para una articulación fluida.

Índice

Capítulo 1. Números racionales

1.1. Ubicación curricular

Este apartado pretende visibilizar dónde y cómo se presentan los objetivos y alcances curriculares relativos al contenido específico de **números racionales**, para lo cual profundizaremos en la distinción conceptual entre números racionales y fracciones, y en cómo esta distinción incide en la comprensión del sistema de equivalencia y operaciones.

Tabla 1. Síntesis de ubicación curricular del contenido

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
	Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2014) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)		*Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2ª ed., 2015) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)	
Objetivos curriculares	**Tema: Números racionales y fracciones** • Comprender a la fracción como cociente entre números naturales. • Resolver problemas de medidas en los cuales las relaciones entre las partes o entre las partes y el todo pueden expresarse usando fracciones. • Utilizar la recta numérica para ubicar o comparar fracciones. **Tema: Expresiones decimales** • Analizar las relaciones entre fracciones decimales y expresiones decimales. • Usar la recta numérica para ubicar o comparar expresiones decimales. • Resolver situaciones que requieran un análisis del valor posicional en la notación decimal. **Tema: Operaciones con números racionales** • Sumar y restar fracciones y expresiones decimales utilizando diferentes recursos de cálculo, incluso el procedimiento convencional. • Resolver multiplicaciones de fracciones en el contexto de la proporcionalidad directa y del área.	**Tema: Números racionales y fracciones** • Comprender a la fracción como cociente entre números naturales. • Resolver problemas de medidas en los cuales las relaciones entre las partes o entre las partes y el todo pueden expresarse usando fracciones. • Usar la recta numérica para ubicar o comparar fracciones. **Tema: Expresiones decimales** • Distinguir y utilizar las relaciones entre fracciones decimales y expresiones decimales. • Usar la recta numérica para ubicar o comparar expresiones decimales. • Resolver situaciones que requieran un análisis del valor posicional en la notación decimal. **Tema: Operaciones con números racionales** • Sumar y restar fracciones y expresiones decimales utilizando diferentes recursos de cálculo, incluso el procedimiento convencional. • Multiplicar fracciones y expresiones decimales en el contexto de la proporcionalidad.	**Tema: Números racionales** • Usar los números racionales para resolver problemas de medida y de proporcionalidad, identificando las diferencias entre el funcionamiento de los números racionales y los enteros. (p. 514) **Tema: Expresiones decimales** • Dominar la relación entre escritura fraccionaria y escritura decimal. • Comprender que todo número racional admite una escritura decimal finita o periódica. **Tema: Operaciones con números racionales** • Evidenciar la necesidad de fraccionar la unidad de medida y construir segmentos conmensurables para poder medir. • Usar la recta numérica como contexto del sentido de medida. • Comprender las relaciones de orden en Q. • Buscar fracciones entre dos fracciones dadas, iniciando la comprensión de la idea de densidad. • Explicar por qué al multiplicar o dividir por una potencia de 10 se produce el efecto de correr la coma. • Comprender y usar la multiplicación en los contextos de área y de proporcionalidad.	**Tema: Números racionales** • Recurrir a relaciones entre escritura decimal y fraccionaria para resolver problemas que involucren la densidad en el campo de los números racionales. • Comprender el funcionamiento de la potenciación y la radicación a través de la utilización de las propiedades y el uso de diferentes tipos de calculadoras. **Tema: Expresiones decimales** • Comprender que se puede aproximar un número racional a través de un número decimal tan próximo como se quiera. • Estimar el error producido por el redondeo o el truncamiento a través del uso de calculadora. • Reconocer que los números decimales también son densos en los reales. • Usar la notación científica para expresar números decimales.

<table>
<tr><th>Unidad de análisis</th><th colspan="2">Primaria</th><th colspan="2">Secundaria</th></tr>
<tr><td>Objetivos curriculares</td><td>• Multiplicar y dividir números decimales por la unidad seguida de ceros y establecer relaciones con el valor posicional de las cifras decimales.
• Resolver multiplicaciones de números naturales por expresiones decimales.
• Obtener un cociente decimal entre dos números naturales.
• Ordenar y comparar expresiones decimales y fraccionarias a partir de diversas relaciones y variadas estrategias.
(p. 125)</td><td>• Utilizar la división entre fracciones y entre expresiones decimales en el contexto de la medida y la proporcionalidad.
• Ordenar y comparar expresiones decimales y fraccionarias a partir de diversas relaciones y variadas estrategias.
(p. 127)</td><td>• Realizar operaciones combinadas entre racionales en el contexto de la resolución de problemas.
• Comprender y usar la potenciación y radicación en Q.
(p. 516)</td><td>Tema: Operaciones con números racionales
• Distinguir el orden de los naturales del orden de los racionales (propiedad de primer elemento, propiedad de densidad).
• Reconocer que los números racionales no poseen sucesor ni antecesor.
• Analizar regularidades en colecciones de números racionales y construir fórmulas para modelizarlas.
• Aplicar y comprender la potenciación y radicación en Q.
• Calcular el valor aproximado de una raíz cuadrada, evidenciando la existencia de números irracionales.
(pp. 522 y 523)</td></tr>
<tr><td>Alcances planteados desde la propuesta actual</td><td>• Resolución de problemas de proporcionalidad con números racionales, en la variable independiente y/o dependiente y en la constante (números racionales mayores y menores que 1).</td><td>• Resolución de problemas de medición y de proporcionalidad que involucren números racionales.</td><td>• Dominio de los distintos significados de las fracciones, aportando sentido al uso y la producción de algoritmos para las operaciones y las relaciones de orden.</td><td>• Producción de diferentes recursos y estrategias de cálculo, con base en el conocimiento formal de las propiedades de operaciones y las propiedades de orden de los números racionales.</td></tr>
<tr><td>Progresiones Ideas principales</td><td colspan="2">• Valor posicional de expresiones decimales.
• Lectura y escritura de números decimales.
• Fracción decimal (el denominador como potencia de 10) y fracción unitaria.
• Orden y comparación de expresiones decimales y fraccionarias.
• Composición y descomposición de números decimales usando sumas de fracciones decimales.
• Cociente entre numerador y denominador de una fracción como una expresión decimal con coma.
• Equivalencia entre fracciones y expresiones decimales.
• Operaciones con números decimales y fracciones de manera combinada en el contexto de la resolución de problemas.</td><td colspan="2">• La densidad de los racionales en los reales.
• El orden de los racionales.
• La relación entre una expresión fraccionaria y una decimal para el mismo número.
• La discusión acerca de cuándo un número racional admite una expresión decimal finita o periódica.
• Operaciones con fracciones (suma, resta, multiplicación y división).
• Dominios de validez de relaciones de orden y equivalencia.
• Propiedades de las operaciones.
• Propiedades de las relaciones de orden.
• Propiedades de potencias y raíces que involucren números racionales.</td></tr>
</table>

Unidad de análisis	Primaria	Secundaria
Estudiar y aprender PUENTE	**1. Fracciones y división entera** Esta primera serie de problemas tiene la intención de recuperar la noción de fracción como resultado exacto de una división entre dos números enteros positivos, en el marco de situaciones de reparto equitativo.	
	2. Fracciones, partes y enteros Los problemas de esta sección proponen un trabajo asociado a fraccionamientos y a la comprensión de una fracción como parte de un entero de referencia.	
	3. Comparación de fracciones En estos problemas se trabajan las relaciones entre fracciones y las diferentes estrategias para compararlas. A partir de las situaciones propuestas, se favorece el uso de diferentes estrategias para comparar y ordenar.	
	4. Fracciones y expresiones decimales En este último apartado de la unidad se proponen algunas situaciones que tienen como objetivo, por un lado, indagar sobre las relaciones entre las fracciones y sus expresiones decimales, tanto finitas como periódicas, y por el otro, establecer algunos criterios que permitan anticipar el tipo de expresión decimal que está asociado a una fracción.	

1.2. Contextualización disciplinar

Los números racionales son una de las bases de la aritmética en la matemática escolar. Las fracciones conforman el ámbito fenomenológico de los racionales, pues a partir de las fracciones y sus contextos de significación se realiza el primer acercamiento a los racionales a nivel escolar. La comprensión de las fracciones favorece la percepción de otras nociones, como medición, relaciones proporcionales, probabilidades y operatoria con números reales. Debido a su papel fundamental y transversal en la enseñanza de las matemáticas, los racionales han sido objeto permanente de investigación, considerando su dimensión cognitiva, epistemológica, didáctica y curricular, entre otras.

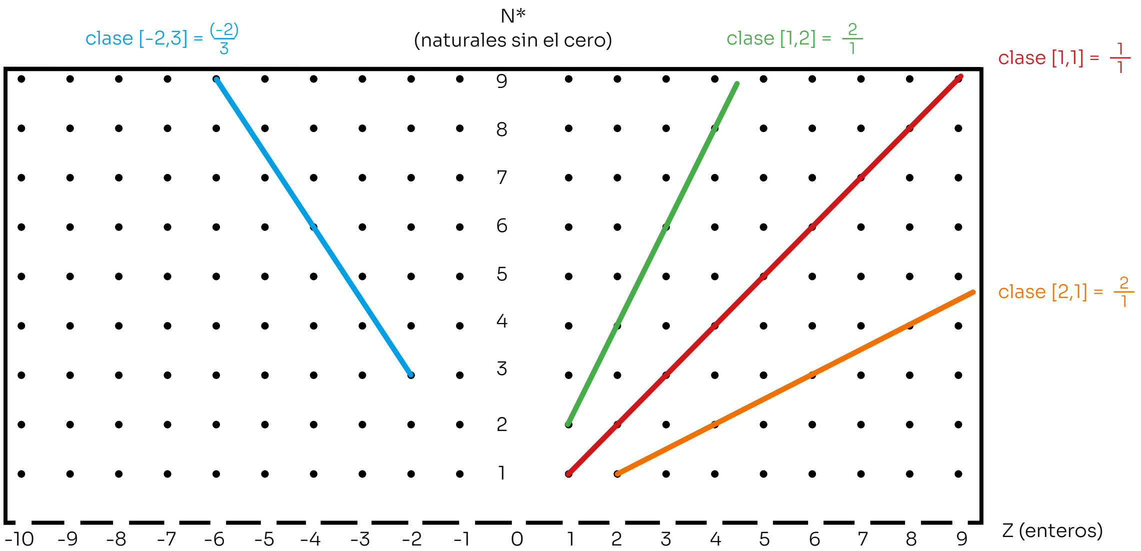
- **Investigaciones sobre los orígenes histórico-epistemológicos de las fracciones**. Estudian cómo las civilizaciones antiguas conceptualizaban el uso de las fracciones y sus alcances para el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje (Bautista y Rodríguez, 2012; Maza Gómez, 1999; Filep, 2001; Moreno y Flores, 2000; Park *et al.*, 2013).
- **Investigaciones sobre los obstáculos y dificultades en el aprendizaje de fracciones**. Abordan las posibles causas asociadas a las dificultades que reportan estudiantes de distintas edades y niveles educativos en torno al aprendizaje de las fracciones, considerando propuestas para diseños de enseñanza (Escolano y Gairín, 2005; Hariyani *et al.*, 2022; Herreros-Torres *et al.*, 2022; Gabriel *et al.*, 2013; Lortie-Forgues *et al.*, 2015).
- **Investigaciones sobre el conocimiento especializado del profesorado para la enseñanza de las fracciones**. Discuten los conocimientos necesarios para la enseñanza de las fracciones en los distintos niveles educativos y la importancia del rol del profesor o de la profesora en los procesos de planificación, implementación y evaluación (Depaepe *et al.*, 2015; Klein y Tirosh, 1997; Rojas *et al.*, 2015; Yañez *et al.*, 2013; Zakaryan y Ribeiro, 2016).

En este apartado abordaremos aquellas ideas que consideramos clave para promover la progresión del aprendizaje en torno a los racionales, con el potencial didáctico para atender las dificultades u obstáculos reportados por la literatura especializada. Estas reflexiones serán la base para avanzar en la problematización de la progresión de la enseñanza de fracciones en la matemática escolar, desde las ideas fuerza.

1.2.1. Contextos de significación para las fracciones

Uno de los aspectos que resultan más controversiales al momento de enseñar fracciones es la **distinción conceptual entre fracción y número racional**. Por una parte, un número racional responde a un sistema numérico de referencia, el sistema de los números racionales, con operaciones y propiedades bien definidas. De esta forma, *número racional* corresponde a una noción de la matemática formal, que se institucionalizó en el siglo XIX. Por otra parte, las fracciones son la expresión fenomenológica de los racionales, surgieron de manera muy temprana en la historia de la humanidad y responden a distintos usos y contextos. Las fracciones anteceden al concepto de *número racional*, porque existían y se usaban mucho antes de la formalización de los números racionales. En este sentido, el sistema de los números racionales no es directamente identificable con el conjunto de las fracciones, porque un número racional representa una clase de equivalencia[1], es decir, un mismo número racional puede expresarse por infinitas fracciones, aparentemente "distintas". Por esta razón es posible obtener tantas fracciones equivalentes como se desee, ya sea mediante simplificación o amplificación.

Imagen 1. Diagrama de algunos ejemplos de racionales como clases de equivalencia



En la **imagen 1** se representan, a través de líneas, algunos racionales como clases de equivalencia. Los puntos representan pares ordenados (a, b) con $a \in Z$ y $b \in Z^*$. Los puntos que pertenecen a una misma línea corresponden a la misma clase de equivalencia y conforman un número racional específico. La línea recta continua se usa solo con el fin de marcar los puntos que están en la misma clase.

a. Fenomenología

Las fracciones poseen una fenomenología amplia, con distintos contextos de significación.

1 Los números racionales pueden definirse a partir de la relación de equivalencia R en el conjunto $Z \times N^*$, de modo que, para cualquier par (a, b) y (c, d) pertenecientes al conjunto $Z \times N^*$, se tiene que (a, b) se relaciona con (c, d) mediante R sí y solo si $ac = bd$. Para profundizar en el tema se puede consultar Gómez-Mulett y Pérez Schmalbach (2016).

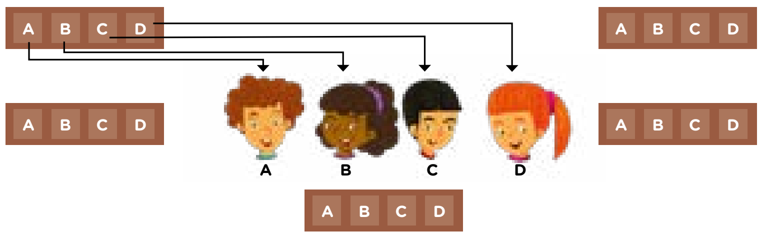
El uso de distintas situaciones ayuda a facilitar la comprensión de las y los estudiantes. Una de las más conocidas es la relación parte/todo. Otras se describen a continuación.

a. Situaciones de reparto equitativo de un todo. Se trata de situaciones en las que un todo constituido por uno o más objetos se divide en partes iguales y se toman o consideran algunas de esas partes. Por ejemplo, repartir una barra de chocolate en partes iguales entre cuatro amigos.

b. Situaciones de reparto equitativo en las que el número de objetos que se reparten no es múltiplo del número de individuos entre los que se reparten. Se trata de situaciones en las que los objetos pueden ser divididos en partes sin que pierdan sus propiedades básicas. En este caso, la existencia de un resto obliga a dividir en partes iguales la unidad de reparto para poder seguir repartiendo el resto de forma igualitaria entre los individuos.

Podemos ver un claro ejemplo de cómo trabajar esta sutil diferencia en *Estudiar y aprender en Quinto* (**imagen 2**). En la **actividad 1**, se propone una situación de reparto equitativo de un todo del tipo continuo, porque la unidad que se quiere repartir es un objeto que puede cortarse o dividirse sin que pierda sus propiedades, en este caso, la de ser un alimento. En la **actividad 2**, se amplía la significación, pues se requiere repartir cinco chocolates entre cuatro personas, y 5 no es múltiplo de 4.

Imagen 2. “Problemas para repartir”, *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2024b, p. 66)



Problemas para repartir

1. Francisco quiere repartir un chocolate entre 4 amigos, de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada. ¿Qué parte del chocolate le tocará a cada uno?

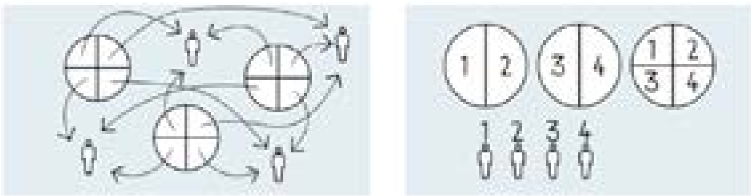
2. Para repartir 5 chocolates entre 4 amigos/as, de manera que todos/as reciban la misma cantidad y no sobre nada, Martina hizo el siguiente dibujo.

a. ¿Qué cantidad de chocolate recibió cada uno/a con este reparto?

La estrategia que se propone consiste en repartir cada uno de los chocolates en cuatro partes iguales, extendiendo el reparto equitativo de un todo. También es posible que algunos/as estudiantes piensen en repartir una barra de chocolate a cada amigo/a y en dividir la barra que sobra en cuatro partes iguales. Así, podrían resolver el problema dando a cada amigo/a una barra de chocolate y $\frac{1}{4}$ de barra de chocolate. Compartir estas distintas estrategias ofrece la oportunidad de poner en discusión la equivalencia entre $1\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{4}$. Este tipo de análisis se observa de manera más explícita en *Estudiar y aprender en Sexto* (**imagen 3**), donde se comparten dos formas de realizar el reparto equitativo, considerando tres objetos continuos (pizzas) que se deben repartir entre cuatro personas.

La **pregunta b** de la **actividad 3** está orientada a que los/as estudiantes puedan inferir la equivalencia entre las dos formas de reparto y, en consecuencia, la equivalencia entre las fracciones que representan dichos repartos.

Imagen 3. “Fracciones para repartir y componer cantidades”, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2024c, p. 85)



3. Julia debe repartir 3 pizzas entre 4 personas de manera que todas coman la misma cantidad y que no sobre nada. Se le ocurrieron dos formas de hacer el reparto.

Opción 1

Opción 2

a. ¿Qué cantidad de pizza recibe cada una de las personas en cada reparto? Respondé en tu carpeta.

b. ¿Cómo es posible saber con seguridad que, con ambas formas de repartir, cada persona recibe la misma cantidad de pizza? Respondé en tu carpeta.

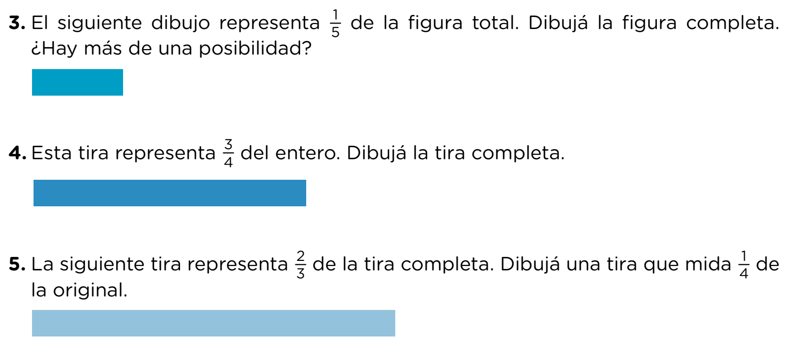
Cabe señalar que, si el conjunto que se quiere repartir es de naturaleza discreta, no resulta tan natural imaginar la división o partición del resto. Si, por ejemplo, lo que se desea repartir son bolitas de vidrio, no es tan simple decir que a cada niño/a le corresponden $\frac{5}{4}$ de bolitas, porque la quinta bolita no se puede dividir en cinco partes, no solo porque es físicamente muy difícil dividir una bolita de vidrio, sino porque, al dividirla, perdería su cualidad de bolita. Por ello, es muy importante pensar en la naturaleza de los objetos al momento de diseñar situaciones contextualizadas para el aprendizaje de las fracciones.

a. Situaciones de reparto proporcional en partes que guardan una cierta relación. A veces se realizan repartos que no son equitativos, donde los individuos reciben o contribuyen en función de cierta jerarquía o necesidad. Por ejemplo, si en un reparto un individuo recibe 3 veces más que otro (relación multiplicativa), recibirá 6 unidades si el segundo recibe 2. En este caso, decimos que el reparto se hace en la razón 3 a 1. Este tipo de situaciones permiten generar un puente hacia las situaciones de proporcionalidad.

b. Situaciones de medida. Este contexto se asocia principalmente a situaciones que se relacionan con sistemas de medidas físicas, como peso, tiempo, masa, capacidad, longitud y superficie, entre otras. Se refiere a medir una cierta magnitud que no es múltiplo de la unidad de medida y se caracteriza por responder a un proceso geométrico-físico antes que aritmético. En las situaciones de medida se comparan dos cantidades de una misma magnitud (homogéneas), estableciendo cuántas veces tiene que ser repetida (cantidad entera de veces) cada una de ellas para obtener dos cantidades iguales.

Es muy importante que las situaciones de medida se puedan enfrentar efectivamente a través de la construcción o la representación, actuando sobre las magnitudes. Si el problema se puede resolver simplemente desde “hacer cuentas”, entonces es probable que la actividad no genere una auténtica situación de medida. En la **imagen 4** podemos ver una situación de medida donde los/as estudiantes se enfrentan a una figura rectangular y deben proponer la medida del entero (**actividades 3** y **4**) y la medida de una parte (**actividad 5**). Este tipo de actividades, si bien no restringen el uso de instrumentos de medición estandarizada, como una regla métrica, tampoco establecen la técnica que puede usar el/la estudiante, y permiten proponer más de una forma de resolver el problema.

Imagen 4. “Fracciones y medida”, *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d, p. 67)



3. El siguiente dibujo representa $\frac{1}{5}$ de la figura total. Dibujá la figura completa. ¿Hay más de una posibilidad?

4. Esta tira representa $\frac{3}{4}$ del entero. Dibujá la tira completa.

5. La siguiente tira representa $\frac{2}{3}$ de la tira completa. Dibujá una tira que mida $\frac{1}{4}$ de la original.

Las actividades de la **imagen 4** se pueden resolver copiando la medida tantas veces como sea necesario hasta completar el entero de referencia, según la parte representada por la fracción. Una vez logrado el entero es posible obtener cualquier fracción de este a partir de la división en partes iguales. Aquí no es importante decir cuánto mide el todo en términos aritméticos, sino más bien conmensurar o “revelar” el todo.

1.2.2. Relaciones de equivalencia y representaciones

La existencia de los números racionales está estrechamente relacionada con la idea de clases de equivalencia. Los racionales pueden representarse siempre como fracciones, que pueden ser decimales o no decimales. Una fracción decimal se reconoce fácilmente porque el denominador corresponde a una potencia de 10. Denominamos *números con extensión decimal* o *desarrollo decimal* a todos aquellos que resultan de resolver la división que subentiende una fracción y se expresan como números con coma. De esta manera, no confundimos un número decimal, que resulta de una fracción decimal, con un número con desarrollo decimal. Estos números con coma pueden ser finitos o infinitos.
Un racional se puede representar de distintas maneras:

- con representación entera,
- con representación fraccionaria,
- con representación de desarrollo decimal finito,
- con representación de desarrollo decimal infinito.

Veamos un ejemplo. El número dos (2) es un racional, pero lo podemos representar de distintas maneras.

Tabla 2. Representaciones que admite el número 2

Como entero	2
Como fracción	$\frac{4}{2}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{6}{3}$, etc.
Con desarrollo decimal finito	2,0
Con desarrollo decimal infinito	1,9999... = $1{,}\overline{9}$

Ahora bien, no todos los racionales admiten representación entera; por ejemplo, 3,4 no lo podemos representar como número entero, pero sí con las demás representaciones.

Tabla 3. Representaciones que admite el número 3,4

Como fracción	$\frac{34}{10}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{51}{15}$, etc.
Con desarrollo decimal finito	3,4
Con desarrollo decimal infinito	3,399999... = $3,3\overline{9}$

Lo mismo ocurre con otros números que no se pueden representar como números enteros y tampoco como números con desarrollo decimal finito, por ejemplo $\frac{1}{3}$. Si aplicamos el procedimiento de la división a $\frac{1}{3}$, la técnica de la división lleva invariablemente al resto 1, por lo que la división nunca se termina. Por lo tanto, $\frac{1}{3}$ no tiene una escritura decimal finita. Esto quiere decir que algunas fracciones no admiten ser representadas como números con desarrollo decimal finito. ¿Cómo podemos identificar rápidamente este tipo de fracciones sin tener que realizar la división asociada? Por ejemplo, ¿la fracción $\frac{2}{51}$ admite ser representada de manera finita? Si ingresamos en la calculadora (incluso en una científica) la división 2 ÷ 51, se puede apreciar que el resultado es "aparentemente" finito y sin señales de periodicidad: 0,03921568627. Este ejemplo explica por qué es necesaria una mejor estrategia para clasificar fracciones, una que no se reduzca simplemente a realizar la división entre el numerador y el denominador.

¿Podemos confiar en el resultado de la calculadora? **Lo que suelen mostrar las calculadoras corresponde a un número redondeado según una cantidad máxima de decimales previamente programada, pero no necesariamente representa una expresión fiel de la naturaleza de la fracción**. Lo cierto es que $\frac{2}{51}$ es un número con extensión decimal periódica que no admite representación finita. Algo importante de dominar en el ámbito de los racionales en secundaria es reconocer rápidamente qué tipo de representaciones admite un número racional, así como lograr determinar dichas representaciones.

Veamos algunos casos sencillos. Comencemos con algunas fracciones unitarias (fracciones con numerador igual a la unidad), que empezaron a usarse en el antiguo Egipto.

Tabla 4. Análisis de las representaciones de las fracciones unitarias $\frac{1}{n}$ con n = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Fracción unitaria	Significado	Fracción decimal	Extensión decimal
$\frac{1}{2}$	La mitad del entero	$\frac{5}{10}, \frac{50}{100}, \frac{500}{1.000} \cdots$	0,500
$\frac{1}{4}$	La mitad de la mitad del entero	$\frac{25}{100}, \frac{250}{1.000}, \frac{2.500}{10.000} \cdots$	0,250
$\frac{1}{8}$	La mitad de la cuarta parte del entero	$\frac{125}{1.000}, \frac{1.250}{10.000}, \frac{12.500}{100.000} \cdots$	0,125
$\frac{1}{3}$	La tercera parte de un entero	No admite fracción decimal	0,33333... ($0,\overline{3}$)
$\frac{1}{6}$	La mitad de la tercera parte de un entero (o la tercera parte de la mitad de un entero)	No admite fracción decimal	0,16666... ($0,1\overline{6}$)
$\frac{1}{9}$	La tercera parte de la tercera parte de un entero	No admite fracción decimal	0,11111... ($0,\overline{1}$)
$\frac{1}{5}$	La quinta parte de un entero	$\frac{2}{10}, \frac{20}{100}, \frac{200}{1.000} \cdots$	0,200
$\frac{1}{10}$	La mitad de la quinta parte de un entero	$\frac{1}{10}, \frac{10}{100}, \frac{100}{1.000} \cdots$	0,100
$\frac{1}{7}$	La séptima parte de un entero	No admite fracción decimal	$0,\overline{142857}$

Como se puede apreciar en la **tabla 4, ciertas fracciones unitarias no admiten representación como fracción decimal y su extensión decimal puede ser periódica o semiperiódica. Para identificar la extensión decimal, saber de antemano que la fracción unitaria puede expresarse como fracción decimal es de gran ayuda, porque de esta manera se puede llevar a su equivalente como fracción decimal y rápidamente reconocer su extensión decimal finita**.

Por ejemplo, en las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{5}$ los denominadores son divisores de potencias de 10. El 2 y el 5 son divisores de 10, el 4 es divisor de 100, y el 8 es divisor de 1.000. En el resto de los casos, al no ser el denominador un divisor de alguna potencia de 10, la fracción no admite fracción decimal. Esto se conecta directamente con el conocimiento de los criterios de divisibilidad que se enseñan en la escuela primaria. Este tipo de fracciones unitarias y sus respectivas representaciones decimales deben impulsar el trabajo inicial asociado a las relaciones de equivalencia y el cálculo de operaciones. Conocer estas relaciones, incluso de una forma no exhaustiva, facilita la elaboración de estrategias de cálculo. Algunas de estas relaciones de equivalencia se pueden ver en la **tabla 5**.

Tabla 5. Equivalencias entre expresiones aditivas, multiplicativas y cuotativas para las fracciones unitarias

Fracción unitaria	Expresión aditiva	Expresión multiplicativa	Significado	Expresión cuotativa	Significado
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ o bien $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$	$2\cdot\frac{1}{8}$ o bien $\frac{1}{8}\cdot 2$	El doble de $\frac{1}{8}$ de entero, o bien la octava parte de 2 enteros	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	La mitad de $\frac{1}{2}$ de entero
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ o bien $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ o bien $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ o bien $1-\frac{1}{2}$	$2\cdot\frac{1}{4}$ o bien $\frac{1}{4}\cdot 2$	El doble de $\frac{1}{4}$ de entero, o bien la cuarta parte de 2 enteros	$\frac{1}{2}\cdot 1$	La mitad de un entero
1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ o bien $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ o bien $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$2\cdot\frac{1}{2}$ o bien $\frac{1}{2}\cdot 2$	El doble de $\frac{1}{2}$ de entero, o bien la mitad de 2 enteros	$\frac{1}{2}\cdot 2$ $2\cdot\frac{1}{2}$	La mitad de dos enteros. El doble de la mitad de un entero

El fomento de estas habilidades para cambiar y alternar representaciones según sea conveniente se presenta especialmente en 5.º y 6.º de primaria, en el contexto de uso de medidas como litros, kilómetros o dinero. Se presentan situaciones de respuesta cerrada, donde la o el estudiante debe determinar, por ejemplo, la cantidad de veces que una medida está comprendida en otra (razonamiento multiplicativo), en preguntas como "¿Cuántos vasos de $\frac{1}{2}$ litro se pueden llenar con el contenido de una botella de $2\frac{1}{2}$ litros?" (GCABA, 2024b, p. 71) o situaciones más abiertas, donde existen varias respuestas posibles y los/as estudiantes pueden explorar diferentes relaciones, tanto aditivas como multiplicativas, en tareas como "Pensá y anotá en tu carpeta diferentes maneras de pagar $2,80" (GCABA, 2024c, p. 98).

Luego de lograr este dominio con las fracciones unitarias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$, es posible avanzar a otras fracciones decimales que guarden relaciones entre sí, como $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$. Ante esto, una pregunta que surge es cómo abordar la equivalencia de fracciones en general. Recordemos que un número racional es un conjunto de fracciones que son equivalentes entre sí. De ahí la importancia de saber reconocer y construir fracciones equivalentes. Esto nos lleva al delicado uso de las representaciones pictóricas. Para "mostrar" la equivalencia entre dos o más fracciones es usual utilizar representaciones pictóricas que se basan en figuras geométricas regulares, como rectángulos o círculos. La estrategia usual es dividir estas figuras en tantas partes iguales como lo indique el denominador y pintar o tachar tantas partes como indique el numerador. Si se tiene, por ejemplo $\frac{1}{2}$ y una fracción equivalente, digamos $\frac{2}{4}$, se puede representar pictóricamente con la misma superficie tachada, lo que es verificable por medición, superposición o simple inspección visual. Sin embargo, esta estrategia contribuye a la comprensión siempre y cuando la unidad de referencia sea la misma. Es muy importante mantener el tamaño y la forma de las figuras que representan el todo, especialmente cuando se desea que las y los estudiantes puedan comparar de manera visual. Algo similar debe tenerse en cuenta al elegir contextos. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ litro no es lo mismo que $\frac{2}{4}$ de libra, aun si $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Cuando se trabaja con la recta real, también se debe tener cuidado de no cambiar la magnitud que representa a la unidad (el 1). Si se dibujan rectas o figuras donde las magnitudes que representan a la unidad son diferentes, se genera mucha confusión y se convierte el tema de las equivalencias en algo antojadizo desde la perspectiva de la/el estudiante. **Recomendamos, en una etapa temprana, fijar el uso de representaciones pictóricas o concretas a los significados del contexto, de modo que el dibujo represente explícitamente la unidad de referencia (o el todo) que indica el problema, con una medida invariante para todas las veces que esta se use. Lo mismo para el caso de la recta numérica: el 1 debe estar fijo en una posición**.

Para obtener la representación de la extensión decimal de un número, recomendamos buscar estrategias alternativas a la división algorítmica. Por esta razón es muy importante dominar las representaciones decimales de las fracciones unitarias con denominador menor o igual a 10. Veamos un par de ejemplos.

- Para obtener la representación de $\frac{7}{9}$ podemos pensar en $7 \cdot \frac{1}{9}$, donde sabemos que $\frac{1}{9}$ es 0,1111... (**tabla 4**). Entonces $\frac{7}{9}$ es equivalente a 7 veces $\frac{1}{9}$, es decir 0,77777... ($0,\overline{7}$), número cuya extensión decimal es infinita y periódica.
- Para obtener la representación de $\frac{1}{80}$ podemos considerar la fracción $\frac{1}{8}$, que es una fracción decimal equivalente a 0,125. Luego, si dividimos por 10, obtendremos la representación de $\frac{1}{80}$, esto es, 0,0125, número cuya extensión decimal es finita. Este número también admite una representación equivalente como número con extensión decimal infinita semiperiódica: $0,0124\overline{9}$.

No es casualidad que los racionales que admiten representación a través de fracciones decimales se puedan representar como números con extensión decimal infinita. Esto se debe a que nuestro sistema de numeración es posicional en base 10; de ahí que, por ejemplo, todos los números enteros se puedan expresar como números con extensión decimal periódica con el 9 (último dígito del sistema) como periodo. Así, 2 es $1,\overline{9}$ y 1 es $0,\overline{9}$. Cabe destacar la exactitud de estas igualdades; no es que 1,9999... ($1,\overline{9}$) sea *casi* 2 o *aproximadamente* 2: es exactamente 2. Estas son otras formas de representación aritmética de un número. **De este modo, todo número decimal y toda fracción, incluso aquellas que consideramos usualmente como finitas, admiten una expresión con desarrollo o extensión decimal infinita. Sin embargo, no todo número que admite representación con extensión decimal infinita admite una representación decimal finita, solo algunos tienen esa virtud: aquellos que poseen como período el 9**.

Lo anterior también es parte de la explicación del algoritmo para transformar de número con coma a fracción. Cuando el número con coma es un decimal finito, es muy sencillo convertirlo en fracción, solo hay que "leerlo" adecuadamente y hallar el denominador potencia de 10 que le corresponde. Por ejemplo, 0,125 se lee "ciento veinticinco milésimos", por lo que su fracción decimal es $\frac{125}{1.000}$. Abordar la lectura correcta de números decimales contribuye a facilitar la transformación y evitar mecanizar los procesos. Así, cada vez que se tenga una fracción o un número con coma se tendrá conciencia de que dicho número puede expresarse de muchas maneras diferentes, que se pueden usar, según sea conveniente, para resolver un problema.

1.2.3. Orden y densidad de números racionales

Los racionales son un sistema numérico que posee orden total. Esto quiere decir que, si se elige un par cualquiera de números racionales, siempre es posible ordenarlos. Metafóricamente hablando, sería como asegurar que, si se toma al azar un conjunto de números racionales, siempre es posible ponerlos como cuentas en un hilo, uno después del otro. El orden en los racionales asegura que, dados dos números cualesquiera, a y b, siempre es posible solo alguna de estas relaciones a > b, b > a o a = b. Esta idea parece fácil de comprender, pero no es sencilla de asimilar en términos cognitivos, porque, al ser los racionales un sistema totalmente ordenado, poseen el mismo tipo de orden que el de los naturales y los enteros, aunque no cumplen con el axioma del sucesor.

En el sistema de los enteros, dado cualquier entero siempre existe un sucesor y un antecesor. La noción de sucesor, que se enseña de manera temprana en los primeros años de escolaridad a partir de los números naturales, hace pensar que sin un sucesor no es posible "ordenar" los números. Así, para los niños y las niñas, la posibilidad de ordenar un conjunto está conectada con la idea de reconocer qué número va después de otro. Entender que los racionales se pueden ordenar, a pesar de que no existe un sucesor, representa un conflicto cognitivo que se condice con los obstáculos epistemológicos que llevaron a construir las estructuras de orden en los sistemas numéricos.

Los racionales son un sistema numérico que posee dos características muy importantes: el orden total y la densidad en los reales. El primero tiene que ver con la estructura específica del orden y el segundo tiene relación con la no existencia del sucesor. Si tenemos un par cualquiera de números reales distintos entre sí, siempre es posible encontrar al menos un número racional entre ellos. Esto implica que, si tengo un número racional, por ejemplo 3,5, no es posible indicar un número racional específico que le siga, porque siempre podré encontrar otro entre ellos. Si digo, por ejemplo, 3,6, alguien podría decir: ¿y qué pasó con el 3,55?, ¿o el 3,598?, ¿o el 3,599? y, así, se podrían agregar tantos decimales como se desee para encontrar otro valor muy próximo a 3,5 y todavía menor que 3,6.

a. Estrategias para ordenar racionales

En el currículo escolar, las relaciones de orden entre números racionales son un tema importante para promover la transición de la primaria a la secundaria. Para que las y los estudiantes puedan comprender progresivamente cómo ordenar números racionales, deben disponer de diversas estrategias y dominar los cambios de representación, lo que incluye conocer muy bien el sistema de numeración decimal posicional y el uso de la recta numérica. Para promover el uso de la recta numérica, se recomienda iniciar en 4.° y 5.° de primaria con una recta graduada donde el cero y la unidad (1) se indiquen de manera explícita y, además, la unidad sea fácil de dividir en partes iguales con apoyo de una cuadrícula. Luego, en 6.º de primaria, se puede transitar a una recta numérica con cuadrícula, en la que se ubiquen al menos dos fracciones, pero sin indicar la posición del 1. Esta recta se puede usar bajo la consigna de hallar la ubicación del 1 o bien de ubicar algunas fracciones dadas. Lo importante en este tipo de tareas es promover que las y los estudiantes comparen y argumenten sus estrategias.

Un ejemplo de lo anterior se puede ver en la **imagen 5**, donde la recta numérica presenta la ubicación de 0 y $\frac{1}{4}$. En este caso, se puede preguntar por la ubicación de $\frac{1}{8}$ (la mitad de $\frac{1}{4}$), $\frac{3}{4}$ (3 veces $\frac{1}{4}$) o $\frac{1}{2}$ (el doble de $\frac{1}{4}$), fomentando el desarrollo de distintas estrategias. El hecho de que la recta presente al menos dos valores permite descubrir o reconstruir la medida de la unidad de referencia y, por lo tanto, todas las medidas asociadas a partes de la unidad.

Imagen 5. Recta numérica con apoyo de cuadrícula

Esto último es relevante para extender el uso del sistema posicional a los números con desarrollo decimal. Por ejemplo, muchos/as estudiantes podrían pensar que 4,5 es menor que 4,45, porque en el desarrollo decimal se observa un 5, que es menor que 45. En estos casos, resaltar que 0,5 es equivalente a 0,50 podría ayudar a comprender que 50 centésimos es mayor que 45 centésimos. La posibilidad de considerar fracciones o decimales con la misma partición de la unidad de referencia facilita la comparación en términos absolutos.

Lo anterior explica por qué una de las estrategias más comunes para comparar fracciones es transformarlas en fracciones equivalentes donde todos los denominadores sean iguales; el problema es que esta técnica no siempre es tan efectiva en términos de tiempo y capacidad de cómputo. De ahí que se apele a fomentar el desarrollo de habilidades flexibles de sentido numérico, antes que el uso de algoritmos rígidos (Almeida *et al.*, 2014), que le permitan al estudiante reconocer cuándo y cómo usar una estrategia en vez de otra. Veamos algunos ejemplos.

- Ordenar las fracciones $\frac{1}{35}$, $\frac{2}{80}$ y $\frac{3}{75}$. Calcular el denominador común demandaría mucho tiempo y enfrascaría a la o el estudiante en un costoso algoritmo. Si llevamos las fracciones a su versión irreductible, todas las fracciones son unitarias: $\frac{1}{35}$, $\frac{1}{40}$ y $\frac{1}{25}$. De esta manera es mucho más sencillo ordenarlas usando el contexto del reparto de un entero; a mayor cantidad de partes, menor es la parte que se va repartir. Así, la fracción menor es $\frac{1}{40}$, seguida de $\frac{1}{35}$ y, finalmente, de $\frac{1}{25}$, que es la mayor.
- Comparar $\frac{70}{71}$ con $\frac{48}{49}$. En este caso, el denominador es un entero antecesor o sucesor del denominador. Una opción es multiplicar cruzado, pero aplicar el algoritmo puede ser más difícil o tomar más tiempo. En este caso conviene comparar con la unidad, ya sea por exceso o por defecto. Por ejemplo, a $\frac{70}{71}$ le faltan $\frac{1}{71}$ para alcanzar el entero, en cambio a $\frac{48}{49}$ le faltan $\frac{1}{49}$ para alcanzar el entero. La fracción a la que le falte menos para alcanzar el entero será la fracción mayor. Como el defecto para lograr la unidad en ambos casos corresponde a una fracción unitaria, estas son fáciles de comparar: $\frac{1}{71}$ es menor que $\frac{1}{49}$. En consecuencia, $\frac{70}{71}$ es mayor que $\frac{48}{49}$.

Así, hay muchas otras estrategias que se pueden emplear para promover el uso de sentido numérico, prescindiendo del uso de algoritmos convencionales. Favorecer que las y los estudiantes exploren y diseñen sus propias estrategias para comparar y ordenar racionales contribuye a consolidar habilidades transversales de estimación aritmética.

b. Estrategias para intercalar racionales

Intercalar números racionales entre otros dos números debe iniciar con el cuestionamiento de la existencia de tales racionales. Por ejemplo, en el nivel de 4.º de primaria, se puede preguntar: si existe un número entre 0 y 1, o entre 1 y 2, ¿cuál es ese número?, ¿cómo podemos asegurarnos de que, en efecto, es un número que está entre esos otros dos números? En 5.º de primaria se puede avanzar con números decimales, cuestionar si acaso existe un número entre 2,5 y 2,6; ¿cómo se puede obtener dicho número?, ¿cuántos números se pueden determinar?

En 7.º grado se fomentan este tipo de tareas, procurando la exploración de la densidad de los racionales y la búsqueda de los argumentos necesarios para defender sus ideas. En la **imagen 6** se puede observar una actividad orientada a esta búsqueda.

Imagen 6. "Orden de fracciones y expresiones decimales II", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d, p. 95)

1. Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá tu respuesta.

a. Entre 1,2 y 1,3 hay exactamente nueve números.

....

b. Entre 3,45 y 3,48 hay más de dos números.

....

c. Entre $\frac{23}{100}$ y $\frac{29}{100}$ hay exactamente cinco fracciones.

....

d. El número 12,045 es menor que 12,45.

....

Cuando se trata de números decimales, la intercalación de otros números decimales se da con facilidad cuando se extiende el desarrollo decimal usando ceros; por ejemplo, 3,45 y 3,48 se pueden pensar como 3,450 y 3,480, lo que facilita la identificación de varios números intercalados. Cuando se trata de fracciones, existen distintas estrategias, cuyo uso depende del contexto y del tipo de fracciones involucradas. Antes de entrar en el detalle de estas técnicas, analicemos el siguiente caso.

Andrés, maestro de matemáticas de 7.º grado, les enseña a sus estudiantes a intercalar fracciones usando la técnica del mínimo común denominador.
El primer ejercicio dice: "Encontrá una fracción entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{3}$".
Marta, una de sus estudiantes, realiza este procedimiento: $\frac{(3+2)}{(7+3)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, y le indica al maestro que la fracción es $\frac{1}{2}$.
Andrés, un tanto incrédulo, le pregunta: "¿Por qué lo hiciste así?". Marta contesta con otra pregunta: "Pero ¿está bien o no?". Andrés no está tan seguro, solo había calculado la fracción usando la técnica del mínimo común denominador, pero se da cuenta de que $\frac{3}{7}$ es menor que $\frac{1}{2}$ y, a su vez, de que $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, y así reconoce que efectivamente $\frac{1}{2}$ se encuentra entre ambas fracciones. Una vez que lo verifica, le dice a Marta: "Mirá, $\frac{1}{2}$ sí está entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{3}$, pero te resultó solo por coincidencia. Te recomiendo que aprendas el procedimiento que enseñé antes para que así siempre estés segura".

¿Creés que el profesor Andrés está en lo correcto? ¿Qué habrías hecho en su caso? ¿En qué casos puede usarse el procedimiento propuesto por Marta? ¿Qué contexto de la vida cotidiana le da significado al razonamiento de Marta?

Te dejamos estos interrogantes para que los pienses matemáticamente. Compartiremos algunos otros ejemplos que pueden ser útiles para disponer de una batería de estrategias para intercalar fracciones.

- Obtener el denominador común y amplificar. Por ejemplo: intercalar 3 fracciones entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{7}$.
  - El menor denominador común es 35.
  - Las fracciones equivalentes son $\frac{14}{35}$ y $\frac{30}{35}$.
  - En este caso no es necesario amplificar porque hay varios números naturales entre 14 y 30.
  - Se eligen tres números cualesquiera entre 14 y 30, y se obtienen las fracciones $\frac{16}{35}$, $\frac{18}{35}$ y $\frac{20}{35}$.
- Obtener el promedio simple entre dos fracciones. Esta estrategia asegura hallar una fracción que estaría en el punto medio entre ambas. Esto se puede repetir tantas veces como sea necesario. Para sacar el promedio se suman las fracciones y se divide el resultado por la mitad.
- Obtener el numerador común y evaluar los denominadores. Esta técnica es fácil de usar cuando las fracciones ya poseen el mismo numerador y distinto denominador, por ejemplo, $\frac{5}{12}$ y $\frac{5}{18}$. Entre estas fracciones podemos identificar fácilmente, y en orden decreciente, a las fracciones $\frac{5}{13}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{5}{16}$ y $\frac{5}{17}$. No son las únicas, pero son las que se pueden obtener por simple inspección.

Cabe considerar que las estrategias para comparar dos fracciones suelen ser más fáciles de comprender que las de ordenar o comparar un conjunto de fracciones; por ello, se requiere que las y los docentes profundicen en la pertinencia del uso de cada estrategia. De acuerdo con Siegler y Pyke (2013), las tareas relacionadas con ordenar varias fracciones según el tamaño o intercalar fracciones son aspectos particularmente importantes en la comprensión conceptual de los números racionales. Es decir, aquello que pareciera ser de carácter procedimental, en realidad requiere de un mayor enfoque conceptual y con uso de sentido numérico.

1.2.4. Operatoria de números racionales

En los números racionales se definen dos operaciones: la suma y la multiplicación. Ambas cumplen con las propiedades de clausura, conmutatividad, asociatividad, existencia de elemento neutro y elemento inverso. Además, la multiplicación es distributiva sobre la suma. Estas propiedades se pueden usar para generar estrategias de cálculo y ayudan a mejorar la comprensión conceptual. En el segundo ciclo de primaria se espera que las y los estudiantes dominen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, tanto de fracciones como de decimales en distintos contextos de significación. En secundaria se espera que las y los estudiantes dominen operaciones combinadas entre racionales, incluyendo la extensión a las operaciones de potenciación y radicación.

a. Algunos alcances sobre el significado de las propiedades

Algunas de las propiedades, como la conmutatividad en la multiplicación ($a \cdot b = b \cdot a$), pueden parecer obvias, pero no son triviales en términos cognitivos. Por ejemplo, la multiplicación entre una fracción y un entero se puede significar de distinta manera según el orden de los factores. Si quiero saber cuánto es $\frac{3}{4}$ de 4 enteros, puedo multiplicar $\frac{3}{4} \cdot 4$, y este orden en particular se lee $\frac{3}{4}$ de 4 enteros; por ejemplo, se puede imaginar como la acción de repartir 4 panes en 4 partes iguales y tomar 3 de esas partes. Pero si multiplicamos en el otro orden $4 \cdot \frac{3}{4}$, se interpreta como 4 veces la fracción $\frac{3}{4}$, que podría concebirse como tener 4 porciones de $\frac{3}{4}$ de litro de jugo (una magnitud o medida) y preguntarse cuántos litros de jugo se tienen en total. Es importante permitir a las y los estudiantes explorar la propiedad de la conmutatividad desde el descubrimiento, usando este tipo de situaciones. Algo similar ocurre con el resto de las propiedades.

b. Campo aditivo

La suma de fracciones es una de las operaciones que puede traer más complicaciones a las y los estudiantes, porque su comprensión implica haber dominado previamente la equivalencia de fracciones y la importancia de considerar la misma unidad de referencia. La unidad de referencia solo puede advertirse adecuadamente en situaciones contextualizadas. Imaginemos que se tiene una cena con gaseosa, pizza y manzanas. Si una persona consume $\frac{1}{4}$ de litro de gaseosa, $\frac{1}{8}$ de pizza y $\frac{1}{2}$ manzana, ¿tiene sentido preguntarse cuánto alimento consumió en total? Si bien es cierto que es posible plantear la suma $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}$, en realidad no tiene mucho sentido realizar la suma, porque las magnitudes no son homogéneas. Esto es similar a lo que ocurre en el álgebra cuando se plantea la suma de variables no semejantes. Cuando se trata de la suma de fracciones, deben enfatizarse dos aspectos: que las magnitudes son homogéneas (las fracciones corresponden a partes de una misma unidad de referencia) y que la partición de la unidad o entero que define cada fracción es la misma. Ambos aspectos revisten varias dificultades conceptuales para los/as estudiantes, tanto de primaria como de secundaria.

Para profundizar en estas ideas, analicemos un caso didáctico.

> Una maestra les presentó a sus estudiantes varias representaciones de las fracciones, entre ellas, aquella de las fracciones como parte o porción de un conjunto de objetos. Les enseñó, por ejemplo, que $\frac{2}{3}$ puede concebirse como 2 de 3 y $\frac{1}{2}$ como 1 de 2, hasta que un día les propuso una suma: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Los/as niños/as sumaron numeradores y denominadores por separado y obtuvieron $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{(1+1)}{(2+3)} = \frac{2}{5}$.
> La maestra los/as corrigió, pero una de sus estudiantes le explicó: “Seño, yo pensé que en una caja hay una bolita roja y una blanca; las rojas son la mitad del total. En otra caja hay una bolita roja y 2 blancas; las rojas son un tercio del total. Me acuerdo de que sumar es juntar, así es que yo junto las dos cajas. Echo todas las bolitas en una sola caja. Y ahí tengo ahora 2 rojas y 3 blancas. O sea, las rojas son 2 de 5, $\frac{2}{5}$ del total”.

¿Qué habrías hecho en el lugar de la maestra? ¿Creés que la forma de razonar de la estudiante es correcta? ¿Qué podría proponerse para que surja naturalmente la necesidad de usar denominadores iguales? Dejaremos estas preguntas para la reflexión personal.

Otra forma de preparar el pensamiento aditivo es a través de la descomposición, ya sea de fracciones o de decimales; por ejemplo, descomponer la unidad en fracciones unitarias o una fracción unitaria en otras fracciones más pequeñas, buscando todas las maneras posibles: ¿de cuántas maneras posibles se puede descomponer $\frac{1}{2}$? Si pensamos en medio litro, $\frac{1}{2}$ L = $\frac{1}{4}$ L + $\frac{1}{4}$ L, $\frac{1}{2}$ L = 1 L − $\frac{1}{2}$ L, $\frac{1}{2}$ L = $\frac{1}{8}$ L + $\frac{1}{8}$ L + $\frac{1}{4}$ L, y así muchas otras formas de descomposición. En el caso de las fracciones decimales, esto resulta muy útil para extender el sistema posicional decimal, por ejemplo, advertir la igualdad 0,753 = 0,7 + 0,05 + 0,003 puede ser más sencillo que advertir la igualdad $\frac{753}{1.000} = \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1.000}$. Alternar las representaciones en los procesos de descomposición también ayuda a desarrollar el razonamiento aditivo.

c. Campo multiplicativo

El significado de la multiplicación de fracciones involucra abordar gradualmente la extensión desde situaciones restringidas a sumas repetidas (multiplicación usual de números naturales) a situaciones asociadas a la proporcionalidad, donde los decimales y las fracciones representan magnitudes (Isoda y Olfos, 2021). Para favorecer esta transición, se recomienda el uso de diagramas de cinta desde primer ciclo de primaria, para que las y los estudiantes se familiaricen con el trabajo de números como medidas continuas y no solo discretas. Las rectas numéricas proporcionales y el diagrama de la regla de tres (ver **imagen 8**) se recomiendan para preparar la extensión de la multiplicación de números enteros a decimales.

En 7.º grado el currículo sugiere abordar situaciones de proporcionalidad y fracciones, que ayudan a comprender el campo multiplicativo. Sin embargo, es importante tener en cuenta que, incluso en situaciones de razones y proporciones, se podría estar extendiendo el significado de la multiplicación como suma iterada. Todo depende de cómo el contexto asigna un rol específico a los factores. Veamos un ejemplo tomado del libro *Estudiar y aprender en Séptimo* (**imagen 7**).

Imagen 7. "Multiplicación con fracciones y entre fracciones", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d, p. 87)

1. Una pizzería está organizando un evento y necesita calcular qué cantidad de pizzas debe preparar para ese día. Estima que cada persona come alrededor de $\frac{3}{8}$ de una pizza entera. Completá la siguiente tabla.

Cantidad de personas	1	2	3	4	5	10	12	17
Cantidad de pizzas	$\frac{3}{8}$							

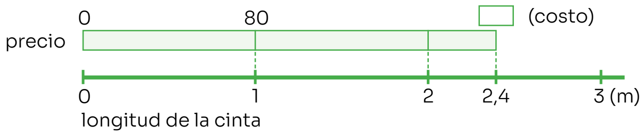
PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

Cuando se multiplica una fracción por una cantidad entera, se puede resolver sumando esa fracción tantas veces como indica dicha cantidad. Por ejemplo, $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{15}{6} = 2\,\frac{3}{6}$.

En la actividad de la **imagen 7** la cantidad de personas es una variable discreta que representa al multiplicador, y la cantidad de pizzas es una variable continua que representa al multiplicando. En este contexto, la multiplicación se explica bajo el modelo de "tantas veces", donde el número entero representa la cantidad de veces que se debe sumar la fracción. Si bien este paso parece necesario, si las y los estudiantes se quedan en este significado de la multiplicación, se generan obstáculos para avanzar a la multiplicación entre dos fracciones, porque en este caso ninguno de los factores puede entenderse desde la lógica del "tantas veces". Además, en la multiplicación de fracciones y decimales no siempre el resultado es un valor mayor respecto del multiplicando, como ocurre con la suma repetida. Entonces, surge la pregunta: **¿cómo podemos diseñar situaciones que ayuden a construir un significado para la multiplicación que supere la noción de suma repetida?**

Las situaciones proporcionales implícitas ayudan a introducir la multiplicación de fracciones o decimales, de modo que la acción de multiplicar tenga un sentido más allá de la suma iterada, incluso cuando uno de los factores sigue siendo un número natural. Veamos un ejemplo, sugerido en Isoda y Olfos (2021), que podríamos trabajar en 6.º de primaria: "El precio de una cinta es de 80 pesos por metro. Averigüemos cuánto costarían 2,4 m". En este caso es muy pertinente sugerir el trabajo con la recta numérica, complementando el diagrama de cintas con la tabla de proporcionalidad, como se muestra en la **imagen 8**.

Imagen 8. Uso de representaciones para introducir la multiplicación de decimales. Adaptado de Isoda y Olfos (2021)



precio ($)	80	?
longitud de la cinta (m)	1	2,4

Como se puede apreciar en la **imagen 8**, la multiplicación 80 por 2,4 no se interpreta como 80 veces 2,4. Este problema se puede resolver de diferentes maneras, pero lo importante es que 2,4 es el multiplicador, no el multiplicando. El uso del diagrama de cintas ayuda a que la o el estudiante pueda pensar que, si 1 metro cuesta 80 pesos, entonces 2,4 metros deben costar algo más que el doble de ese precio. El razonamiento combinará aspectos aditivos y multiplicativos, fortaleciendo la transición hacia un nuevo significado para la multiplicación. La parte aditiva se relaciona con la parte entera de 2,4 metros. Si un metro cuesta 80 pesos, lo justo (o proporcional) sería que dos metros costaran 160 pesos (80 + 80), pero esto no es suficiente para resolver el problema. La parte decimal, 0,4, también requiere ser considerada en el cálculo del precio. Si 1 metro cuesta 80 pesos, entonces 0,4 metros, es decir, $\frac{4}{10}$ de metro deberían costar $\frac{4}{10}$ del precio de la unidad. Los $\frac{4}{10}$ de 80 pesos permiten que los/as estudiantes puedan poner en juego el razonamiento multiplicativo, con las nociones de fracción de un número y de reparto equitativo. La décima parte de 80 pesos es 8, y 4 de estas partes corresponden a 32 pesos. Luego, 160 pesos más 32 pesos ($192) nos brinda el precio total para 2,4 metros.

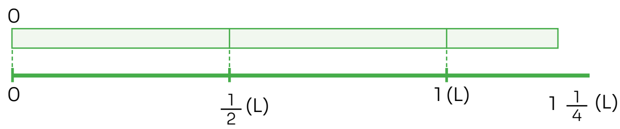
Otro aspecto que es importante resaltar al momento de multiplicar fracciones es tratar de anticipar, usando sentido numérico, la posición en la recta del valor resultante. Si se multiplican, por ejemplo, dos fracciones menores que 1, cabe preguntarse si el resultado es una fracción menor que el menor factor, mayor que el mayor factor o bien una fracción que se encuentra entre ambos factores. Al multiplicar fracciones se tiene que:

- el resultado de multiplicar dos racionales mayores que 1 es mayor que el mayor de los factores,
- el resultado de multiplicar dos racionales menores que 1 es menor que el menor de los factores,
- el resultado de multiplicar dos racionales, uno mayor que 1 y otro menor que 1, es un racional que se encuentra entre los factores (mayor que el menor y menor que el mayor).

Si bien la multiplicación de fracciones no está libre de asperezas, las mayores dificultades se producen con la introducción del neutro multiplicativo y el algoritmo de la división. Desde una perspectiva estrictamente matemática, la división por un número *a* se define como la multiplicación por el recíproco (o inverso multiplicativo) de *a* ($\frac{1}{a}$). El currículo de secundaria promueve introducir la división de fracciones a partir del trabajo operatorio con el inverso multiplicativo, buscando, por ejemplo, el factor faltante para lograr que el resultado sea 1 ("¿Por qué número hay que multiplicar 5 para obtener como resultado 1?"). Luego se avanza hacia la división de fracciones por un número natural, en el contexto de situaciones de reparto ("Tenés que repartir $\frac{3}{4}$ kg de almendras en 3 bolsitas que pesen lo mismo"). También se refuerza la multiplicación y la división considerando situaciones de proporcionalidad entre dos variables, donde cada una se expresa en distintas magnitudes fraccionarias. El conocimiento sobre la división de fracciones se institucionaliza irremediablemente a través de la definición formal de multiplicación por el recíproco. Esta definición se traduce en un algoritmo, que se descontextualiza de los significados de reparto o sustracción iterada. El proceso de algoritmización de la división de fracciones configura otro choque cognitivo para las y los estudiantes. ¿Es posible permitir la exploración de la división de fracciones sin imponer el uso de la definición matemática formal?

Supongamos que se quiere enseñar la división $1\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$, ¿podríamos pensar en un contexto de la vida diaria que les permita a las y los estudiantes dar significado a la división y explorar por sus propios medios una estrategia para resolverla? Consideremos que hallar un adecuado contexto de significación ayuda a consolidar la comprensión conceptual y evitar la mecanización. Hacer el ejercicio de crear o diseñar un problema nos ayuda a evaluar el dominio de nuestro propio conocimiento para enseñar un tema. Existen varias opciones, pero compartiremos una en particular que conecta con la idea de reparto de medidas continuas: repartir $1\frac{1}{4}$ litro en vasos de $\frac{1}{2}$ litro. Aquí se debe entender que repartir en 2 partes iguales no es lo mismo que repartir en partes equivalentes a $\frac{1}{2}$ de la unidad de referencia. Por ejemplo, si tengo 4 litros y los reparto en dos partes iguales, obtengo dos partes, cada una de 2 litros; pero, si tengo 4 litros y los reparto exhaustivamente en envases de $\frac{1}{2}$ de litro, obtengo 8 envases llenos. Estas situaciones se relacionan en lo cotidiano con el concepto de porción. En el etiquetado del envase de un alimento es usual encontrar la cantidad de porciones que contiene o el equivalente a una porción en términos fraccionarios. Para explorar este tipo de situaciones, ayuda promover el uso del diagrama de cintas o de la recta numérica, fijando la magnitud que hace las veces de unidad de referencia (**imagen 9**).

Imagen 9. Diagrama de cintas para representar fracciones en situaciones de medidas



En el diagrama de la **imagen 9**, se puede observar que en $1\frac{1}{4}$ litro tenemos 2 porciones de $\frac{1}{2}$ litro y algo más. Este valor restante es equivalente a la mitad de una porción ($\frac{1}{4}$ es la mitad de $\frac{1}{2}$ litro). Así, podemos decir que $1\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ es $2\ \frac{1}{2}$ o 2,5 porciones. El resultado está en *porciones*, no en la magnitud de referencia, en este caso, litros.

También es posible que se piense este mismo problema en términos de fracciones mayores que la unidad, es decir, $\frac{5}{4} \div \frac{1}{2}$. Si un/a estudiante desea resolver este problema prescindiendo de una representación pictórica o gráfica, podría recurrir a la división directa; después de todo, es un problema de división. Si desconocen el algoritmo de la división de fracciones o la instrucción de transformar en multiplicación, para las y los estudiantes es natural pensar en usar la división de números naturales. Así, $\frac{5}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{5 \div 1}{4 \div 2} = \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$ es claramente equivalente a 2,5 porciones. Haber obtenido el resultado correcto no es casualidad ni coincidencia: dividir directamente los numeradores entre sí y los denominadores entre sí es una estrategia que fue desestimada en la matemática escolar. No son claras las razones por las que no se utiliza este procedimiento en la enseñanza; tal vez se deba a que no siempre el resultado de cada división da como resultado un valor entero, pero eso no significa que no tenga fundamento matemático. Por el contrario, la división por separado permite obtener siempre dos números racionales, uno para el dividendo y otro para el divisor; el cociente entre estos valores siempre genera un valor racional, por la propiedad de clausura.

Tanto la multiplicación como la división de fracciones decimales (aquellas cuyo denominador es una potencia de 10) y expresiones decimales en general ameritan un tratamiento aparte en los cursos de primaria. La división por potencias de 10, especialmente en el ámbito de la medición, permite el surgimiento de los números decimales como una extensión del trabajo con el sistema de numeración posicional de los naturales. Asimismo, la multiplicación y división de decimales por potencias de 10 (incluso las menores que 1) pueden revisarse de manera análoga a la multiplicación y división de números naturales por potencias de 10; la comparación facilita la búsqueda de regularidades. Para esto se recomienda el uso de una recta numérica con escala métrica o de una tabla (**tabla 6**).

Tabla 6. Multiplicación por potencias de 10 en el sistema decimal posicional

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ·10 ·10 ·10

10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$\cdot 10^{0}$	10^{1}	10^{2}	10^{3}
· 0,00001	· 0,0001	· 0,001	· 0,01	· 0,1	· 1	· 10	· 100	· 1.000
0,00015	0,0015	0,015	0,15	1,5	15	150	1.500	15.000
0,000024	0,00024	0,0024	0,024	0,24	2,4	24	240	2.400

1.3. Problematización de la matemática escolar

Este apartado presenta las ideas fuerza que se proponen para movilizar de manera transversal en el sistema educativo el desarrollo del contenido de fracciones y números racionales en general. Sobre la base de lo que se presentó en los apartados anteriores, "Ubicación curricular" y "Contextualización disciplinar", se proponen las **ideas matemáticas** que se consideran de relevancia para trabajar durante la articulación escolar.

1. La noción de fracción es diferente de la noción de número racional. Un número racional no es exactamente igual a una fracción. Un número racional es una abstracción, un elemento de un sistema formal. Las fracciones, en cambio, establecen aspectos fenomenológicos y contextos de significación. Los números racionales están determinados por clases de equivalencia, cada una de ellas formada por todas las fracciones equivalentes entre sí. Se dice que cada una de las clases es un número racional y que el conjunto de todas las clases es el conjunto de los números racionales.

Los racionales son todos aquellos números que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$, donde *a* y *b* son enteros y *b* es distinto de 0. Este sistema se representa por la letra *Q* y posee varias propiedades.

$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$
En palabras: *Los números racionales son todos los números de la forma* $\frac{a}{b}$*, donde* ***a*** *y* ***b*** *son números enteros y* ***b*** *es distinto de cero.*

El número racional $[\frac{2}{3}] = \{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}...\}$ lo identificamos con la fracción $\frac{2}{3}$ cuando es usada como representante de cualquier otro miembro de dicha clase. Las distintas fracciones de una misma clase pueden ser escritas de diferentes maneras, pero son iguales una vez definido el sistema de los números racionales.

2. Las fracciones están conectadas a distintos contextos de significación. Tener en cuenta las características específicas de cada contexto contribuye a que las y los estudiantes puedan construir y conectar significados. Algunas de las situaciones que contextualizan la comprensión de las fracciones son la relación parte/todo, el reparto equitativo, el reparto proporcional y la medición. Para trabajar con fracciones es muy importante explicitar la unidad de referencia, hacerla visible tanto en la explicación como en la representación del problema. Sin la unidad de referencia, el trabajo con fracciones pierde sentido, especialmente en la educación primaria.

3. Los números racionales se caracterizan por poseer distintas formas de representación. Estas representaciones pueden ser aritméticas (fracción, fracción decimal, número decimal, número con extensión decimal, etc.) o pictóricas (recta numérica, diagramas de cinta, áreas de figuras, etc.). El dominio de estas representaciones es fundamental para reconocer y generar familias de fracciones equivalentes. Una perspectiva completa de todas las formas de representación y uso que admiten las fracciones permite desarrollar el sentido numérico y flexibilizar la aplicación de las operaciones. Si las y los estudiantes conocen las fracciones, pero no las vinculan aún con los números decimales, las posibilidades para visualizar y ubicar las fracciones en la recta numérica son limitadas.

Todo número racional se puede representar como fracción o como número con extensión decimal, no siendo estas representaciones excluyentes. A diferencia de lo que usualmente se cree, todos los racionales pueden representarse como un número con coma del tipo periódico, incluso aquellos que son considerados “finitos”. Esto se debe a que la periodicidad con dígito 9 tiene características muy peculiares. Así, por ejemplo, $3{,}\overline{9}$ es 4 y $3{,}6\overline{9}$ es 3,7. Esta versatilidad no debe ser desatendida.

4. Los números racionales conforman un sistema totalmente ordenado y denso en los reales (R). Que sea un sistema ordenado quiere decir que, para cualquier par de números racionales que se elija, es posible determinar el mayor, el menor o bien si son iguales.

$(\forall a \in Q, \forall b \in Q)\ (a = b \vee a < b \vee a > b)$
En palabras: *Para cualquier par de números racionales* ***a*** *y* ***b*** *se tiene que estos pueden ser iguales, o bien* ***a*** *es menor que* ***b*** *o bien* ***a*** *es mayor que* ***b****.*

La densidad en R puede ser difícil de abordar en educación primaria, porque involucra un ámbito numérico con el que las y los estudiantes aún no están familiarizados/as. No obstante, se puede explicar de manera sencilla, considerando que, dados dos números racionales, siempre es posible encontrar un racional que está entre medio. Como este proceso se puede realizar para cualquier par de números reales, es posible afirmar que entre dos racionales existen infinitos racionales.

$(\forall a \in Q, \forall b \in Q)\ (a < b \Rightarrow \exists\, c \in Q; a < c < b)$
En palabras: *Para todo par de números racionales* ***a*** *y* ***b****, si a es menor que* ***b*** *entonces existe un número racional* ***c*** *tal que* ***c*** *es mayor que* ***a*** *y menor que* ***b****.*

La densidad de los números racionales invita a la tarea de intercalar tantas fracciones como se desee entre dos fracciones dadas. Esta actividad debe iniciarse desde la exploración, al igual que la acción de ordenar fracciones, con el propósito de fomentar que las y los estudiantes desarrollen sus propias estrategias.

Matemáticamente hablando, el orden de las fracciones está muy vinculado con la propiedad de densidad; sin embargo, desde el punto de vista cognitivo, comparar dos fracciones es distinto a ordenarlas, lo que, a su vez, es distinto a encontrar fracciones entre fracciones. De acuerdo con Wiest y Amankonah (2019), solo la mitad del estudiantado de octavo grado de EE. UU. eligió correctamente el orden del conjunto $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{9}$, aun cuando podían usar la calculadora. Probablemente, las y los estudiantes también tenían dificultades para leer y comprender números decimales. Este hecho evidencia el valor de trabajar el orden y la densidad mediante distintos registros de representación.

5. Es muy importante promover el desarrollo del sentido numérico antes que la imposición de algoritmos de cálculo. Para ello, se recomienda presentar los nuevos temas como problemas abiertos en el marco de contextos de significación, antes que explicaciones con definiciones y procedimientos preestablecidos. Permitir que las y los estudiantes exploren y diseñen sus propias estrategias contribuye a la construcción de significados y el logro de consensos. Es fundamental promover la discusión pública sobre las posibles estrategias, valorando la variedad y analizando matemáticamente su efectividad.

6. En los números racionales se definen dos operaciones: la adición y la multiplicación. En la transición de primaria a secundaria un aspecto relevante es la unificación de la suma y la resta bajo un solo cuerpo de propiedades; lo mismo sucede con la multiplicación y la división. En el caso de la adición, si se trabaja con fracciones, es recomendable iniciar con descomposiciones y composiciones de fracciones que guardan relación entre sí, por ejemplo, reconocer familias aditivas como $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Para introducir la suma de fracciones que no guardan relación evidente entre sí, es importante considerar contextos de significación que resalten la necesidad de pensar las fracciones siempre junto con la unidad de referencia. La suma de fracciones, así como la comparación de sus medidas, no se puede realizar sin fijar qué es el todo. Si se olvida, los tamaños de las fracciones no se pueden comparar. Para ver una fracción como un número y comparar sus tamaños, lo ideal es fijarlas a la magnitud o cantidad de referencia, como $\frac{3}{4}$ L y $\frac{1}{2}$ km. Además, es necesario comprender que, para extender la noción de suma como “unión” o acción de “juntar”, las partes deben corresponder a la misma partición. Esta es la razón por la que se insiste en transformar las fracciones en otras equivalentes con el mismo denominador.

En cuanto a la multiplicación y la división de fracciones, también es importante situar estas operaciones en distintos contextos que permitan transitar desde la multiplicación como suma iterada a la multiplicación desde un enfoque del trabajo con proporciones, donde la multiplicación se puede entender como el fraccionamiento de un número. Algo similar ocurre con las situaciones de división. Se recomienda explorar sus significados a partir de distintas situaciones de reparto y no apresurar la transformación de la división a multiplicación por el inverso. Eligiendo las situaciones correctas, es posible pensar en la división no como una multiplicación, sino como una auténtica división de medidas.

1.4. ¿Cómo operativizar las ideas fuerza?

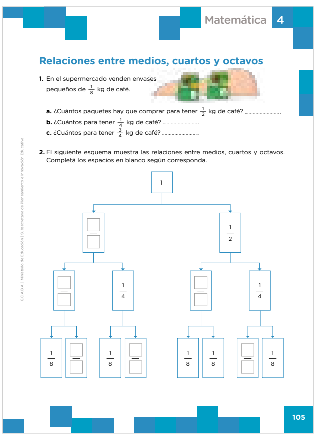
Sobre la base de los materiales *Estudiar y aprender* para primaria, *Estudiar y aprender* para secundaria, las secuencias didácticas de primaria, las secuencias didácticas de secundaria y lo abordado en los apartados anteriores sobre la ubicación curricular y contextualización disciplinar, proponemos una manera de operativizar las ideas fuerza presentadas en el apartado anterior.

Si bien el propósito es abordar la articulación desde 6.° grado de primaria hasta 2.° año de secundaria, hemos querido abarcar desde las primeras apariciones de las fracciones para visibilizar su evolución y, de esa manera, fundamentar la propuesta.

PDF *Estudiar y aprender* para primaria https://bit.ly/3yBMblq	PDF *Estudiar y aprender* para secundaria https://bit.ly/49KhKqf	PDF Secuencias didácticas de primaria https://bit.ly/3T6Ku7e	PDF Secuencias didácticas de secundaria https://bit.ly/4bNJHPS

4.° grado

En cuarto grado de primaria **el propósito es introducir las fracciones en los contextos de medición y reparto equitativo** (en ese orden), para que las y los estudiantes conozcan la terminología y aprendan a resolver problemas aditivos sencillos y de comparación, usando principalmente fracciones unitarias, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$. Además, se hace hincapié en asociar un número mixto con la suma de un número entero y una fracción, buscando establecer relaciones entre la fracción y la unidad. Ejemplos de estas actividades se pueden encontrar en los problemas de adición de fracciones que se proponen en el texto de *Estudiar y aprender en Cuarto* (GCABA, 2024a, pp. 105 y 121).


Matemática 4

Relaciones entre medios, cuartos y octavos

1. En el supermercado venden envases pequeños de $\frac{1}{8}$ kg de café.

a. ¿Cuántos paquetes hay que comprar para tener $\frac{1}{2}$ kg de café? ....

b. ¿Cuántos para tener $\frac{1}{4}$ kg de café? ....

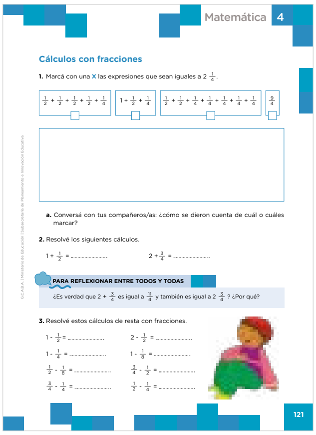
c. ¿Cuántos para tener $\frac{3}{4}$ kg de café? ....

2. El siguiente esquema muestra las relaciones entre medios, cuartos y octavos. Completá los espacios en blanco según corresponda.

105

PDF

Problemas aditivos de fracciones.
Estudiar y aprender en Cuarto
(GCABA, 2024a, p. 105)
https://bit.ly/3WWSw4S



Matemática 4

Cálculos con fracciones

1. Marcá con una X las expresiones que sean iguales a $2\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ☐ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{9}{4}$ ☐

a. Conversá con tus compañeros/as: ¿cómo se dieron cuenta de cuál o cuáles marcar?

2. Resolvé los siguientes cálculos.

$1+\frac{1}{2}=$ .... $2+\frac{3}{4}=$ ....

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

¿Es verdad que $2+\frac{3}{4}$ es igual a $\frac{11}{4}$ y también es igual a $2\frac{3}{4}$? ¿Por qué?

3. Resolvé estos cálculos de resta con fracciones.

$1-\frac{1}{2}=$ .... $2-\frac{1}{2}=$ ....

$1-\frac{1}{4}=$ .... $1-\frac{1}{8}=$ ....

$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=$ .... $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$ ....

$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$ .... $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$ ....

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

121

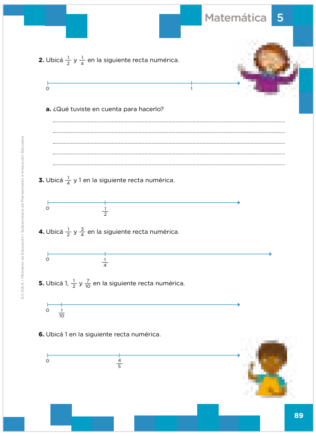
Problemas aditivos de fracciones. *Estudiar y aprender en Cuarto* (GCABA, 2024a, p. 121) https://bit.ly/3WSPMpl

En este nivel, las fracciones se abordan primero desde el contexto del uso de medidas, como litros y kilos, porque resulta más natural en estos sistemas de medición hablar de las relaciones entre medios, cuartos y octavos. Paulatinamente también se van introduciendo otras fracciones múltiplos de las primeras, como $\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{4}$, siempre en el contexto de la medición. De esta forma, **se desarrollan de manera conjunta las habilidades de comparación y el razonamiento aditivo**. Esto es abordado al máximo de su potencial, promoviendo que el estudiantado reconozca y resuelva todas las familias aditivas posibles; por ejemplo, que se logre identificar distintas formas de completar 1 kg con porciones de $\frac{1}{4}$ kg, $\frac{1}{2}$ kg y $\frac{1}{8}$ kg, pero que también se pueda reconocer cuánto le falta a una porción o a una combinación de porciones para lograr 1 kg. Estas exploraciones se realizan sin anteponer el uso del algoritmo de la suma. De hecho, solo una vez que la o el estudiante ha explorado los problemas, intentando desarrollar sus propias estrategias, se sugiere el uso de fracciones equivalentes para abordar la suma.

Si bien se da prioridad al uso de fracciones para medir, el tratamiento con fracciones no se restringe a las fracciones unitarias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{8}$. Los contextos de reparto equitativo y exhaustivo sirven para introducir otras fracciones, como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{7}$. Así, las y los estudiantes van ampliando su conocimiento sobre fracciones, usos y formas de representación.

5.° grado

En 5.° grado de primaria se consolida el trabajo con las fracciones en el contexto de la medición y el reparto equitativo, **introduciendo el trabajo con la recta numérica como herramienta para facilitar la comparación y el orden.** Además, **se fortalece el trabajo con expresiones equivalentes**, extendiendo las fracciones al uso de números con coma. Las fracciones y las expresiones decimales permiten diversificar el uso de representaciones, estimulando el cálculo mental de operaciones y la resolución de problemas con fracciones en el ámbito de la proporcionalidad. El texto escolar de 5.° grado propone varias actividades que promueven el uso de la recta numérica para representar fracciones (GCABA, 2024b, pp. 89 y 90).


Matemática 5

2. Ubicá $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ en la siguiente recta numérica.

0 1

a. ¿Qué tuviste en cuenta para hacerlo?

3. Ubicá $\frac{1}{4}$ y 1 en la siguiente recta numérica.

0 $\frac{1}{2}$

4. Ubicá $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ en la siguiente recta numérica.

0 $\frac{1}{4}$

5. Ubicá 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{10}$ en la siguiente recta numérica.

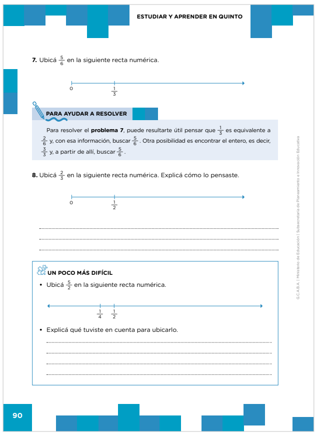
0 $\frac{1}{10}$

6. Ubicá 1 en la siguiente recta numérica.

0 $\frac{4}{5}$

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

89


ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO

7. Ubicá $\frac{5}{6}$ en la siguiente recta numérica.

0 $\frac{1}{3}$

PARA AYUDAR A RESOLVER

Para resolver el **problema 7**, puede resultarte útil pensar que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$ y, con esa información, buscar $\frac{5}{6}$. Otra posibilidad es encontrar el entero, es decir, $\frac{3}{3}$ y, a partir de allí, buscar $\frac{5}{6}$.

8. Ubicá $\frac{2}{3}$ en la siguiente recta numérica. Explicá cómo lo pensaste.

0 $\frac{1}{2}$

UN POCO MÁS DIFÍCIL

- Ubicá $\frac{5}{2}$ en la siguiente recta numérica.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

- Explicá qué tuviste en cuenta para ubicarlo.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

90

Problemas aditivos de fracciones.
Estudiar y aprender en Quinto
(GCABA, 2024b, pp. 89 y 90)
https://bit.ly/3yCSXrb

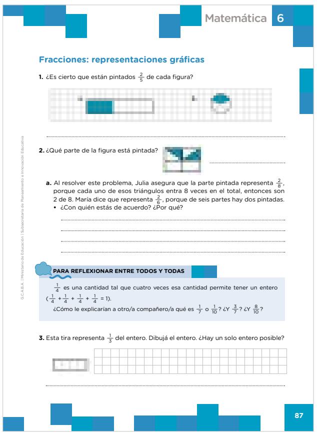
Previo al trabajo con la recta numérica, se promueve la representación de fracciones a partir del uso de cintas o secciones rectangulares. Al estudiantado se le entrega una tira o cinta, que representa una medida de longitud, y se le pide que dibuje una fracción específica de la cinta dada (la cinta representa la unidad) o bien que dibuje el entero, asumiendo que la cinta dada representa una parte específica del total. Para favorecer la conversión del sistema de cintas al uso de la recta numérica, se recomienda fijar la longitud de la unidad de referencia. De esta forma, el todo o entero pasa de ser una magnitud variable a la unidad (1) en la recta numérica. Asimismo, antes del trabajo con la recta es indispensable abordar el sentido numérico asociado a la comparación de fracciones con actividades que permitan reconocer si una fracción es mayor o menor que 1 (o que $\frac{1}{2}$).

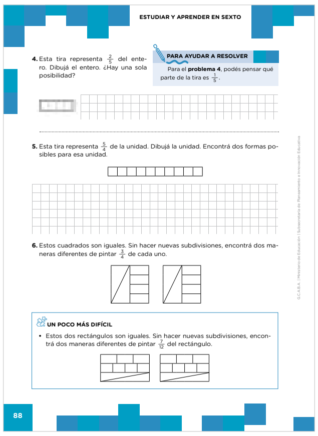
En este nivel, **se consolida la suma de fracciones usando fracciones equivalentes**; también se trabaja la suma de fracciones y números con coma de manera combinada. Para introducir los números con coma, se utilizan situaciones de medida del ámbito cotidiano que requieren del sistema decimal posicional para expresar valores no enteros, como el dinero y el sistema métrico. A su vez, como en este nivel se aborda la división por potencias de 10, los números decimales surgen como el cociente entre números enteros y potencias de 10.

En cuanto al ámbito multiplicativo, se promueve el sentido numérico asociado a la búsqueda de dobles, triples y mitades, para luego avanzar a la multiplicación de un entero por una fracción o decimal. En este sentido, la multiplicación aún se entiende como suma iterada (*n* veces una fracción). De un modo similar, se propone la división entre una fracción y un número entero, bajo el contexto del reparto equitativo.

6.º grado

En 6.º grado de primaria se refuerzan los aprendizajes sobre fracciones logrados en 4.º y 5.º. La **fracción** comienza a entenderse no solo como una relación entre la parte y el todo, sino también **como un cociente entre números enteros**. Esto favorece la **transformación de la fracción a número con coma y viceversa**. Además, se promueve explorar distintas formas de componer fracciones para construir una medida o cantidad, como litros o kilos. Este tipo de actividades favorece la operatoria aditiva, prescindiendo del uso del algoritmo. Las situaciones de reparto equitativo en las que el número de objetos que se reparten no es múltiplo del número de individuos entre los que se reparten se usan para favorecer la discusión en torno a la equivalencia entre un número mixto y una fracción mayor que 1 (numerador mayor al denominador). En este nivel también se fomenta el uso de distintas representaciones pictóricas (regiones o superficies, recta numérica y diagrama de cintas o tiras). En esta línea, el texto de 6.º grado de primaria promueve el uso de representaciones gráficas para facilitar la identificación de regiones equivalentes cuando el todo o entero es una figura (GCABA, 2024c, pp. 87 y 88). De igual modo, se usan rectas numéricas que explicitan siempre la ubicación de al menos dos números, con el propósito de que los y las estudiantes reconstruyan la unidad de referencia.





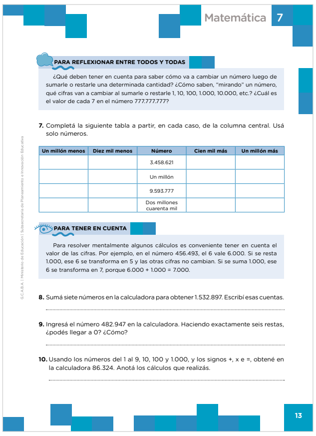
Problemas aditivos de fracciones. *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2024c, pp. 87 y 88) https://bit.ly/3wRpWHx

En este nivel, la multiplicación entre una fracción y un entero supera la conceptualización de suma iterada y se concibe como fracción o partición de un número. Así, se anima a las y los estudiantes a calcular la fracción de una cantidad o medida, pero también a identificar qué cantidad tiene como parte o fracción otra cantidad dada. En este nivel es muy importante que el estudiantado sea consciente de las distintas formas en las que se puede manifestar la unidad de referencia: como objeto que se puede partir y no perder sus cualidades (comida especialmente), como conjunto discreto de objetos, como una unidad de medida y como un número (cociente entre dos enteros). **Explicitar la unidad de referencia facilita el trabajo con la operatoria aditiva y multiplicativa**.

En cuanto a las relaciones de orden, en este nivel la elección de las actividades se vuelve más sofisticada. Se promueve que las y los estudiantes puedan identificar fracciones entre dos enteros consecutivos y que puedan comparar parejas de fracciones. En este último caso, se presentan fracciones con igual numerador o con igual denominador; si las fracciones no presentan igual numerador o igual denominador, guardan alguna relación fácil de inferir respecto del 1 o del $\frac{1}{2}$, por ejemplo, una de ellas es evidentemente mayor que 1 y la otra es menor que 1. Esta forma de comparación por simple inspección o cálculo mental ya fue desarrollada en el nivel anterior, lo que contribuye a no imponer el uso de algoritmos. Algo similar pasa en el campo aditivo, se fomentan las sumas y sustracciones entre fracciones cuyas relaciones multiplicativas son conocidas.

7.º grado

En séptimo grado **se refuerza el concepto de fracción como un número y no solo como un operador, aproximándose cada vez más a la conceptualización de números racionales**. Se promueve la comprensión de los números con coma o expresiones decimales a partir de la división por potencias de 10. En este aspecto se prioriza la conceptualización antes que el cálculo, así que se permite el uso de calculadora. Lo importante es **desarrollar la comprensión del sistema decimal posicional y la relación entre las fracciones decimales y las expresiones decimales**. Así como los números naturales siempre pueden descomponerse aditivamente en el sistema decimal, los números decimales también admiten una descomposición a partir de fracciones decimales. En este nivel, se introduce la multiplicación y división de fracciones y expresiones decimales por potencias de 10 considerando distintas estrategias, como se puede observar en el texto de 7.º grado (GCABA, 2024d, pp. 13 y 96). Asimismo, la transformación entre representaciones fraccionarias y decimales se aborda fuertemente en el ámbito de la medición, pero aún no se trabaja con expresiones decimales periódicas o semiperiódicas.



Matemática 7

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

¿Qué deben tener en cuenta para saber cómo va a cambiar un número luego de sumarle o restarle una determinada cantidad? ¿Cómo saben, "mirando" un número, qué cifras van a cambiar al sumarle o restarle 1, 10, 100, 1.000, 10.000, etc.? ¿Cuál es el valor de cada 7 en el número 777.777.777?

7. Completá la siguiente tabla a partir, en cada caso, de la columna central. Usá solo números.

Un millón menos	Diez mil menos	Número	Cien mil más	Un millón más
		3.458.621		
		Un millón		
		9.593.777		
		Dos millones cuarenta mil		

PARA TENER EN CUENTA

Para resolver mentalmente algunos cálculos es conveniente tener en cuenta el valor de las cifras. Por ejemplo, en el número 456.493, el 6 vale 6.000. Si se resta 1.000, ese 6 se transforma en 5 y las otras cifras no cambian. Si se suma 1.000, ese 6 se transforma en 7, porque 6.000 + 1.000 = 7.000.

8. Sumá siete números en la calculadora para obtener 1.532.897. Escribí esas cuentas.

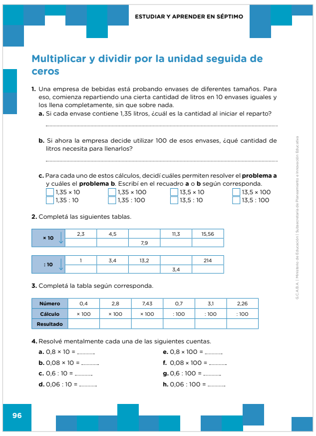
9. Ingresá el número 482.947 en la calculadora. Haciendo exactamente seis restas, ¿podés llegar a 0? ¿Cómo?

10. Usando los números del 1 al 9, 10, 100 y 1.000, y los signos +, x e =, obtené en la calculadora 86.324. Anotá los cálculos que realizás.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

13

Problemas aditivos de fracciones.
Estudiar y aprender en Séptimo
(GCABA, 2024d, p. 13)
https://bit.ly/3X3xPod



ESTUDIAR Y APRENDER EN SÉPTIMO

Multiplicar y dividir por la unidad seguida de ceros

1. Una empresa de bebidas está probando envases de diferentes tamaños. Para eso, comienza repartiendo una cierta cantidad de litros en 10 envases iguales y los llena completamente, sin que sobre nada.

a. Si cada envase contiene 1,35 litros, ¿cuál es la cantidad al iniciar el reparto?

b. Si ahora la empresa decide utilizar 100 de esos envases, ¿qué cantidad de litros necesita para llenarlos?

c. Para cada uno de estos cálculos, decidí cuáles permiten resolver el **problema a** y cuáles el **problema b**. Escribí en el recuadro **a** o **b** según corresponda.

☐ 1,35 × 10 ☐ 1,35 × 100 ☐ 13,5 × 10 ☐ 13,5 × 100
☐ 1,35 : 10 ☐ 1,35 : 100 ☐ 13,5 : 10 ☐ 13,5 : 100

2. Completá las siguientes tablas.

× 10	2,3	4,5		11,3	15,56
			7,9		

: 10	1	3,4	13,2		214
				3,4	

3. Completá la tabla según corresponda.

Número	0,4	2,8	7,43	0,7	3,1	2,26
Cálculo	× 100	× 100	× 100	: 100	: 100	: 100
Resultado						

4. Resolvé mentalmente cada una de las siguientes cuentas.

a. 0,8 × 10 = ...
b. 0,08 × 10 = ...
c. 0,6 : 10 = ...
d. 0,06 : 10 = ...
e. 0,8 × 100 = ...
f. 0,08 × 100 = ...
g. 0,6 : 100 = ...
h. 0,06 : 100 = ...

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

96

Problemas aditivos de fracciones.
Estudiar y aprender en Séptimo
(GCABA, 2024d, p. 96)
https://bit.ly/4bznTHm

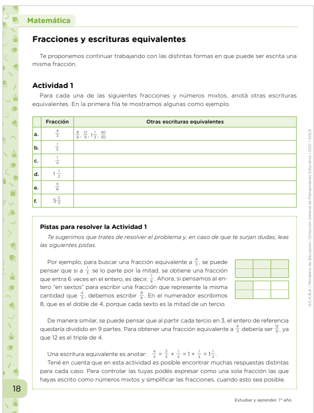
En este nivel, se continúan trabajando problemas de fracciones en el contexto de medición y reparto equitativo, usando diversas representaciones pictóricas. El uso de la recta numérica cobra especial importancia tanto para representar fracciones como expresiones decimales. Los problemas de fracción de una cantidad se diversifican, **combinando operatoria aditiva con operatoria multiplicativa**. También se refuerza el cálculo mental con fracciones, buscando identificar lo que falta para completar una cantidad entera o cuántas veces cabe una fracción en una cantidad entera. Las relaciones aditivas y multiplicativas se promueven desde la discusión y la argumentación.

En cuanto a las estrategias de comparación y orden, se consolidan las tareas abordadas en 6.º de primaria, pero aumentando el nivel de dificultad. **La técnica de comparación y orden mediante fracciones equivalentes con denominador común es formalizada**. En este nivel, se proponen indicios de la densidad de los números racionales en los reales, incluyendo actividades relacionadas con reconocer qué fracciones podrían encontrarse entre dos enteros consecutivos dados, intercalar fracciones entre dos fracciones dadas, y ubicar fracciones en una recta numérica calibrada y marcada. Los contextos de significación se amplían al ámbito de la proporcionalidad y los porcentajes, lo que permite dar contexto al ámbito multiplicativo. Finalmente, en este nivel se introducen las multiplicaciones entre fracciones como medidas de longitud en el contexto del cálculo de áreas y relaciones de proporcionalidad, formalizando la técnica de multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador. También se introduce la división entre fracciones, de manera progresiva, primero la división de fracción por entero y luego la división entre fracciones; esto último una vez abordada la relación entre el inverso y el neutro multiplicativo.

En este nivel, **se formaliza la división como multiplicación por el inverso multiplicativo**. En este ámbito también se trabaja con números decimales, a partir de distintas actividades de multiplicación y división, en contextos de medidas y mediante la estrategia de transferir las operaciones con decimales a otras equivalentes con números naturales, lo que permite el uso de algoritmos ya conocidos.

1.º año

En 1.º año de secundaria **se presentan formalmente los números racionales como sistema numérico** y se los define como aquellos números que se pueden escribir como fracción. Se inicia retomando el trabajo con las fracciones unitarias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$, para recuperar el conocimiento de las relaciones aditivas y multiplicativas entre estas fracciones y la unidad. También se retoman los contextos de medición. En cuanto a la comparación, se retoman las relaciones respecto de la unidad (¿es mayor o menor que 1?, ¿cuánto le falta o sobra respecto de 1?). En este nivel es muy importante **avanzar hacia la idea más abstracta de número racional**; por ello, **se fomenta la identificación y construcción de clases de equivalencia dado un número racional como representante de la clase**, incluyendo el trabajo con expresiones decimales. En este tipo de actividades se prescinde de un contexto o de la unidad de medida de referencia, lo cual marca un salto respecto de las actividades de equivalencia estudiadas los años anteriores. Véase, por ejemplo, el texto de 1.º año de secundaria (GCABA, 2021a, pp. 18 y 19).


Matemática

Fracciones y escrituras equivalentes

Te proponemos continuar trabajando con las distintas formas en que puede ser escrita una misma fracción.

Actividad 1

Para cada una de las siguientes fracciones y números mixtos, anotá otras escrituras equivalentes. En la primera fila te mostramos algunas como ejemplo.

	Fracción	Otras escrituras equivalentes
a.	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{6}$, $\frac{12}{9}$, $1\frac{1}{3}$, $\frac{40}{30}$
b.	$\frac{1}{5}$	
c.	$\frac{1}{4}$	
d.	$1\frac{1}{2}$	
e.	$\frac{11}{8}$	
f.	$5\frac{2}{3}$	

Pistas para resolver la Actividad 1

Te sugerimos que trates de resolver el problema y, en caso de que te surjan dudas, leas las siguientes pistas.

Por ejemplo, para buscar una fracción equivalente a $\frac{4}{3}$, se puede pensar que si a $\frac{1}{3}$ se lo parte por la mitad, se obtiene una fracción que entra 6 veces en el entero, es decir, $\frac{1}{6}$. Ahora, si pensamos al entero "en sextos" para escribir una fracción que represente la misma cantidad que $\frac{4}{3}$, debemos escribir $\frac{8}{6}$. En el numerador escribimos 8, que es el doble de 4, porque cada sexto es la mitad de un tercio.

De manera similar, se puede pensar que al partir cada tercio en 3, el entero de referencia quedaría dividido en 9 partes. Para obtener una fracción equivalente a $\frac{4}{3}$ debería ser $\frac{12}{9}$, ya que 12 es el triple de 4.

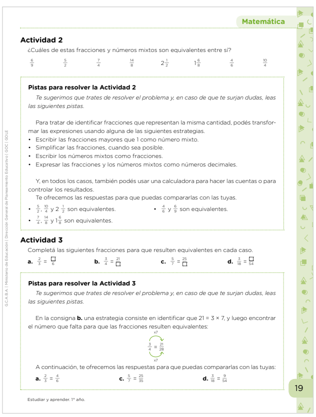
Una escritura equivalente es anotar: $\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Tené en cuenta que en esta actividad es posible encontrar muchas respuestas distintas para cada caso. Para controlar las tuyas podés expresar como una sola fracción las que hayas escrito como números mixtos y simplificar las fracciones, cuando esto sea posible.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | GOC | GOLE

18

Estudiar y aprender. 1° año.


Matemática

Actividad 2

¿Cuáles de estas fracciones y números mixtos son equivalentes entre sí?

$\frac{6}{9}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{14}{8}$ $2\frac{1}{2}$ $1\frac{6}{8}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{10}{4}$

Pistas para resolver la Actividad 2

Te sugerimos que trates de resolver el problema y, en caso de que te surjan dudas, leas las siguientes pistas.

Para tratar de identificar fracciones que representan la misma cantidad, podés transformar las expresiones usando alguna de las siguientes estrategias.

- Escribir las fracciones mayores que 1 como número mixto.
- Simplificar las fracciones, cuando sea posible.
- Escribir los números mixtos como fracciones.
- Expresar las fracciones y los números mixtos como números decimales.

Y, en todos los casos, también podés usar una calculadora para hacer las cuentas o para controlar los resultados.

Te ofrecemos las respuestas para que puedas compararlas con las tuyas.

- $\frac{5}{2}$, $\frac{10}{4}$ y $2\frac{1}{2}$ son equivalentes.
- $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ son equivalentes.
- $\frac{7}{4}$, $\frac{14}{8}$ y $1\frac{6}{8}$ son equivalentes.

Actividad 3

Completá las siguientes fracciones para que resulten equivalentes en cada caso.

a. $\frac{2}{3} = \frac{\square}{6}$ **b.** $\frac{3}{4} = \frac{21}{\square}$ **c.** $\frac{5}{7} = \frac{25}{\square}$ **d.** $\frac{3}{18} = \frac{\square}{54}$

Pistas para resolver la Actividad 3

Te sugerimos que trates de resolver el problema y, en caso de que te surjan dudas, leas las siguientes pistas.

En la consigna **b.** una estrategia consiste en identificar que 21 = 3 × 7, y luego encontrar el número que falta para que las fracciones resulten equivalentes:

$$\frac{3}{4} \overset{\times 7}{=} \frac{21}{28}$$

A continuación, te ofrecemos las respuestas para que puedas compararlas con las tuyas:

a. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ **c.** $\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$ **d.** $\frac{3}{18} = \frac{9}{54}$

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | GOC | GOLE

19

Estudiar y aprender. 1° año.

Problemas aditivos de fracciones.
Estudiar y aprender. 1.º año. Tomo 1
(GCABA, 2021a, pp. 18 y 19)
https://bit.ly/4bFvFPG

En cuanto a las representaciones, se formaliza el uso de la recta numérica y algunas estrategias para reconocer o construir una escala de referencia. En relación con el orden y la densidad, se consolidan las habilidades para ordenar conjuntos de fracciones e intercalar fracciones, aumentando el nivel de dificultad al incorporar números negativos y varias condiciones específicas para la búsqueda de racionales. Respecto de la operatoria aditiva, se formaliza la estrategia de transformar las fracciones en fracciones equivalentes con el mismo denominador, para así sumar los numeradores y conservar el denominador. En cuanto a la operatoria multiplicativa, **las nociones de inverso y neutro multiplicativo se abordan de manera conjunta para sustentar la definición de división como**

multiplicación por el inverso. Se espera que las y los estudiantes utilicen de manera sistemática esta definición como técnica de cálculo. Además, en este nivel, la operatoria de números racionales tiene una presencia transversal en otros ejes temáticos, especialmente en situaciones de resolución de problemas.

2.° año

En 2.° año de secundaria, las actividades relativas a la operatoria y el orden no cambian mucho respecto de las actividades de 1.° año. Sin embargo, se espera que se consoliden las definiciones y propiedades, como también los algoritmos asociados a la suma y la multiplicación. También se espera que las y los estudiantes trabajen con **números de extensión decimal periódica y semiperiódica, distinguiendo las distintas formas de representación aritmética que admite un racional**. En este nivel también es muy importante **comprender que los números racionales nos permiten aproximar, tanto como se desee, un número no racional**, por ejemplo, una raíz no entera ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.). Las nociones de densidad y orden también se deben formalizar en el marco del sistema de los números reales. Los números reales surgen como el sistema numérico que alberga a los números racionales e irracionales, siendo los primeros densos en R.

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivo del año escolar	Caracterización de los contextos de significación de las fracciones. Reconocimiento de sus usos para la resolución de problemas.	Ampliación del ámbito operatorio y de las relaciones de orden de las fracciones, utilizando distintas representaciones y estrategias.	Conceptualización de los números racionales como sistema numérico, sus algoritmos, operaciones, relaciones de orden y propiedades.	Empleo de los números racionales y sus propiedades para su aplicación al ámbito de la potenciación y radicación.
Ideas fuerza	Para introducir el trabajo con fracciones se recomienda utilizar distintos contextos de significación y favorecer la exploración aditiva de las equivalencias mediante la composición y descomposición. Es muy importante abordar la unidad de referencia de manera explícita, propiciando el sentido numérico y retrasando el uso de algoritmos.	Para avanzar hacia la conceptualización de la fracción como un número, se recomienda diversificar el uso de representaciones y las estrategias de cálculo, promoviendo la combinación de razonamiento aditivo y multiplicativo. Es muy importante trabajar la pertinencia de las representaciones según el tipo de problema que se enfrenta.	Para formalizar la conceptualización de los racionales como un sistema numérico, es necesario fomentar el dominio de las transformaciones entre distintas formas de escritura y registros de representación. Es muy importante profundizar en las propiedades tanto de las operaciones como de las relaciones de orden.	Para consolidar el trabajo con las distintas formas de representación aritmética que admite un racional, es necesario ampliar el ámbito de uso a otros problemas de la aritmética (potencias y raíces), haciendo énfasis en las ventajas que ofrecen los racionales para el desarrollo de estrategias de aproximación y estimación de números reales.
Preguntas clave	¿Cuáles son las distintas situaciones que involucran el uso de fracciones? ¿Cómo estas situaciones significan el trabajo con fracciones?	¿Cuáles son las distintas formas de representar las fracciones y cómo estas contribuyen al trabajo con las operaciones?	¿Qué distingue a un racional de una fracción? ¿Cuáles son las propiedades que fundamentan las operaciones y las relaciones de orden en los números racionales?	¿Cómo se pueden usar los racionales para avanzar hacia la comprensión y representación de los números reales?

Materiales propuestos	• *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2024b). Capítulos relacionados con las fracciones. • *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2024c). Capítulos relacionados con las fracciones.	• *Estudiar y aprender en séptimo* (GCABA, 2024d). Capítulos relacionados con las fracciones.	• *Estudiar y aprender. 1.º año. Tomo 1* (GCABA, 2021a). Capítulos relacionados con los racionales.	• *Estudiar y aprender 2.º año. Tomo 1* (GCABA, 2021b). Capítulos relacionados con los racionales.
Ideas involucradas en las actividades de *Estudiar y aprender*	• Desarrollo del sentido numérico para resolver problemas, con base en los contextos de significación. • Transformación de fracción decimal a número decimal y viceversa. • Composición y descomposición aditiva de fracciones en el contexto de la medición.	• Uso del sistema decimal posicional para establecer relaciones entre las fracciones y las expresiones decimales. • Combinación de operatoria aditiva y multiplicativa para resolver problemas que involucran fracciones. • Tratamiento de la equivalencia de fracciones a partir del uso de distintas representaciones.	• Presentación formal de los números racionales como un sistema numérico. • Procedimientos convencionales y no convencionales en operaciones aditivas y multiplicativas de Q. • Relaciones de orden, características y propiedades principales.	• Consolidación de los números racionales como el sistema numérico Q. • Estrategias de estimación y aproximación de números reales a partir de racionales. • Situaciones de potenciación y radicación que involucran números racionales.
Tipos de representaciones abordadas	• Diagrama de cintas. • Regiones de figuras. • Representaciones pictóricas.	• Diagrama de cintas y tablas. • Regiones de áreas rectangulares y cuadrículas. • Recta numérica graduada. • Representaciones pictóricas.	• Recta real. • Tablas. • Representaciones pictóricas.	• Recta real. • Tablas. • Representaciones pictóricas.

Capítulo 2.
Construcción de cuadriláteros

2.1. Ubicación curricular

Se presentan los objetivos curriculares relativos al contenido de **construcción de cuadriláteros** a lo largo del segundo ciclo de educación primaria y del ciclo básico de educación secundaria. Para la revisión, se considerarán documentos publicados por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (GCABA).

Tabla 7. Síntesis de ubicación curricular del contenido

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivos curriculares	*Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* (2014) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)		*Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2ª ed., 2015) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)	
	• Construir cuadrados, rectángulos, rombos y paralelogramos recurriendo a las propiedades relativas a sus lados y ángulos, y diagonales. • Participar de la producción de argumentos que fundamenten las propiedades mencionadas. (p. 126)	• Utilizar propiedades de cuadriláteros y triángulos para decidir la verdad o falsedad de una afirmación o determinar medidas de ángulos de figuras. • Participar de la elaboración de argumentos que fundamenten la validez del procedimiento de construcción apelando a propiedades. (p. 127)	• Comprender las construcciones como actividades que se planifican, apoyándose en propiedades de las figuras. • Construir rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás. • Identificar cuándo una colección de datos determina unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros con regla y compás, y cuándo la construcción es imposible. • Recurrir a criterios de igualdad de triángulos y a las relaciones de ángulos entre paralelas para resolver diversos tipos de problemas. (p. 514)	• Comparar áreas de diferentes figuras sin recurrir a la medida. (p. 521)
Alcances planteados desde la propuesta actual	• Construcción de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes informaciones, usando diferentes instrumentos de geometría.	• Construcción de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes informaciones, analizando, por los datos dados, si es posible realizar o no la construcción de la figura, si es única o si se pueden construir diferentes.	• Producción de nuevas propiedades de las figuras. • Fundamentación de construcciones clásicas con regla no graduada y compás.	• Empleo de la noción de área como magnitud. • Identificar que la construcción de triángulos constituye un punto de apoyo para las construcciones de polígonos en general. • Construcción de posibles criterios de “igualdad” para cuadriláteros.

Unidad de análisis	Primaria	Secundaria
Progresiones Ideas principales	• Reproducción de formas geométricas compuestas por cuadrados y rectángulos. • Construcción de figuras con ángulos rectos trazando las rectas perpendiculares necesarias, usando escuadra o transportador. • Trazo y reconocimiento de las alturas de cualquier triángulo. • Resolución de problemas que involucran las propiedades de los lados, ángulos y diagonales de cuadriláteros. • Clasificación de los cuadriláteros a partir de las propiedades de sus lados, ángulos y diagonales. • Resolución de problemas que implican poner en juego que la suma de los ángulos interiores de un rectángulo es 360°. • Resolución de problemas que implican inferir las medidas de ángulos de triángulos o paralelogramos, sin recurrir a la medición efectiva, apelando a relaciones y propiedades de sus ángulos.	• Construcción de cuadrados, rectángulos, paralelogramos, rombos y trapecios. • Análisis de la cantidad de cuadriláteros diferentes que se pueden construir a partir de un conjunto de datos. • Criterios de congruencia de cuadriláteros.

2.2. Contextualización disciplinar

El desarrollo del pensamiento geométrico en la enseñanza básica, desde el nivel primario hasta el secundario, responde al estudio de la forma y el espacio a través de la medida como una relación entre magnitudes longitudinales y angulares. Este acercamiento busca propiciar un tránsito desde un enfoque estático hacia una perspectiva dinámica de la geometría, lo que permite el estudio de las relaciones geométricas mediante el movimiento y la transformación del espacio[1] uni-, bi- o tridimensional.

Particularmente, el trabajo con la construcción de cuadriláteros es planteado desde diferentes perspectivas didácticas, por ejemplo, usando las clasificaciones como un medio para definir sus propiedades, como se reporta en De Villiers (1994) y Fujita y Jones (2007), o bien a partir del estudio de los triángulos, lo cual suele mantener una estrategia constructiva coherente con el currículo escolar. Este es el caso de la propuesta del Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, pues se asume que el trabajo sobre cuadriláteros gira en torno a dos cuestiones:

- la construcción, junto con el análisis de existencia y cantidad de soluciones, y
- la elaboración de criterios de congruencia.

Los conocimientos referidos a construcción de triángulos serán una base sobre la que se apoyarán los criterios de congruencia para los cuadriláteros (GCABA, 2020, p. 132).

En este capítulo, tal y como se abordó en el capítulo 4, “Construcción de triángulos”, de *Matemática en Red. Tomo I* (GCABA, 2024e), para desarrollar la percepción y visualización

1 Cabe destacar que, en el presente capítulo, el uso de la palabra *espacio* hace alusión al sentido de las dimensiones espaciales, a saber, una dimensión, dos dimensiones o tres dimensiones, y no se restringe a lo que se conoce escolarmente como *geometría del espacio*, en tanto homotecias y sistemas de referencia espacial. De esta manera, se da pie al estudio de las figuras no solo desde su forma y sus medidas, sino también de sus cualidades, como perímetro, área e, incluso, posición.

de las formas geométricas y el espacio que ocupan, se favorecerá el reconocimiento de las semejanzas y diferencias de los elementos que constituyen dos o más formas geométricas. Así, para tratar la construcción y clasificación de los cuadriláteros, se recomienda **alejarse de la memorización y favorecer su caracterización mediante la configuración espacial de dos triángulos que comparten un lado congruente**; de esta manera, el tipo de cuadrilátero que se genere dependerá de las medidas de los triángulos.

a. Sentido y configuración espacial

El estudio del sentido espacial requiere que los elementos geométricos se acompañen del desarrollo de la visualización con la finalidad de enriquecer las imágenes mentales que se generan de dichos elementos, además de dotarlos de funcionalidad. Por eso, el sentido espacial implica la habilidad de reconocer, representar, visualizar y transformar las formas geométricas (Serrano, Ramírez y Flores, 2018).

Una forma de desarrollar el sentido espacial es mediante situaciones o actividades que den sentido a los elementos geométricos, obligando a poner en juego la percepción visual y la configuración (y reconfiguración) del espacio, lo cual implica, según Flores, Ramírez y Del Río (2015) tres componentes básicos.

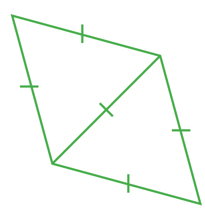
- **a. Elementos geométricos**. Propiedades que permiten la identificación, ordenación y clasificación de figuras geométricas.
- **b. Relaciones geométricas**. Apreciar cualidades en las formas y en los cuerpos geométricos, como la simetría, la equivalencia, la congruencia, etc.
- **c. Ubicación y movimientos**. Disponer de referentes para describir posiciones en el plano o en el espacio, llevar a cabo movimientos y reconocer en ellos regularidades o elementos invariantes.

De esta manera, el desarrollo del sentido espacial en primaria habilitará a las y los estudiantes para interactuar con el mundo que las/os rodea y para la creación de representaciones mentales de este.

b. Triángulos y construcción de cuadriláteros

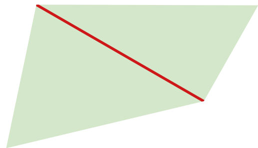
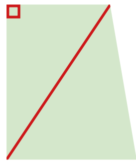
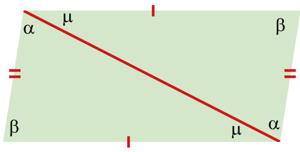
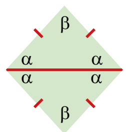
El empleo de triángulos como base para la construcción de cuadriláteros permite explorar, a partir de la semejanza, la congruencia de triángulos y su reconfiguración espacial, otras relaciones propias de los cuadriláteros, además de su clasificación, por ejemplo, la configuración espacial de dos triángulos equiláteros que comparten un lado congruente para construir un rombo (**Imagen 10**).

Imagen 10. Ejemplo de configuración espacial de dos triángulos equiláteros para formar un rombo



En ese sentido, De Villiers (2021) propone situar el estudio de las propiedades de los cuadriláteros a partir de su diagonal, profundizando en las relaciones con sus lados y ángulos.

Tabla 8. Ejemplo de una forma de clasificar algunos cuadriláteros mediante la configuración espacial de dos triángulos. (Adaptado de Empoderamiento Docente, 2022)

Descripción del cuadrilátero	Representación de la figura	Nombre del cuadrilátero
Cuadrilátero formado por la unión de dos triángulos escalenos. Por ello, cuenta con sus cuatro lados distintos en medida.		Trapezoide
Cuadrilátero formado por la unión de dos triángulos en donde uno de ellos es un triángulo rectángulo y el otro no. De esta manera, el cuadrilátero solo cuenta con un par de lados opuestos paralelos.		Trapecio rectángulo
Cuadrilátero formado por la unión de dos triángulos escalenos congruentes, de forma que cuentan con dos pares de lados opuestos paralelos y de la misma medida.		Romboide
Cuadrilátero formado por la unión de dos triángulos isósceles congruentes, de forma que sus cuatro lados tienen igual medida, pero no así sus cuatro ángulos.		Rombo

La articulación de dos triángulos con diferentes formas y medidas da lugar a un cuadrilátero distinto, por lo que el estudio de la conceptualización de los cuadriláteros como figura geométrica no solo es necesario, sino que además requiere de una profundización en las relaciones de medida, tanto de los triángulos que lo conforman como del cuadrilátero en sí mismo.

c. Algunas consideraciones para el estudio de los cuadriláteros

El estudio de los cuadriláteros y su clasificación ha sido ampliamente reportado dentro de la matemática educativa, por ejemplo, y de acuerdo con las investigaciones de De Villiers (1994) y Jones (2000), clasificar está estrechamente relacionado con definir (y viceversa) y las clasificaciones pueden ser jerárquicas (utilizando definiciones inclusivas) o particionales (utilizando definiciones exclusivas).

A continuación, enunciamos algunos de los aspectos que, de acuerdo con Fujita y Jones (2007), son necesarios para la comprensión de los cuadriláteros y su clasificación.

- La capacidad de clasificar una forma de distintas maneras y etiquetarla con distintos nombres; por ejemplo, un rombo también puede llamarse *polígono*, *cuadrilátero*, un tipo especial de paralelogramo o cometa, etc.
- La necesidad de comprender las relaciones transitivas entre los conceptos de formas; por ejemplo, si un cuadrado es un rombo y un rombo es un paralelogramo, entonces un cuadrado también es un paralelogramo.
- La necesidad de comprender la asimetría de las relaciones entre cuadriláteros; por ejemplo, todo rectángulo es un paralelogramo, pero no todo paralelogramo es un rectángulo.
- La necesidad de comprender la asimetría opuesta y las relaciones transitivas de los atributos críticos de los conceptos de forma; por ejemplo, los atributos críticos del

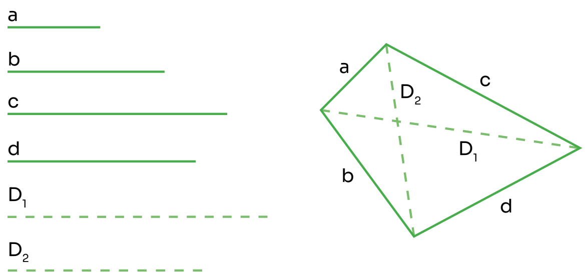
rectángulo están incluidos en los atributos críticos del cuadrado, pero los atributos críticos del cuadrado no están incluidos en los del rectángulo (Fujita y Jones, 2007, p. 4).

Por lo tanto, la propuesta de este material consiste en alejarse de la mera presentación de definiciones de los cuadriláteros y de sus clasificaciones previamente preparadas, y profundizar en la participación activa del proceso de caracterizar y clasificar, mediante una reflexión crítica y comparando las alternativas.

d. Propiedades de las figuras: los cuadriláteros

El estudio de la conceptualización y la construcción de cuadriláteros inicia en la consideración de sus partes: dados cuatro lados (correspondientes a los lados de dos triángulos) y dos diagonales es posible construir un cuadrilátero.

Imagen 11. Representación de un cuadrilátero mediante la consideración de sus lados y diagonales



La introducción y el tratamiento, desde edades tempranas, de la construcción de cuadriláteros conviene que sea mediante un conocimiento previo fundamental en geometría: la construcción de triángulos, esto es, usar pares de triángulos (congruentes o no), unirlos y organizarlos de manera que compartan un lado para configurar un cuadrilátero, como se muestra en la imagen anterior. Este acercamiento didáctico permite estudiar las diferentes características de los cuadriláteros desde la configuración espacial de dos figuras triangulares, como vimos en la **tabla 8**, donde las propiedades intrínsecas a cada par de triángulos dan lugar a un cuadrilátero distinto y, por ende, con características específicas.

Esta es una estrategia que comparte la propuesta curricular para la escuela primaria de GCABA (2014), donde se propone "construir cuadrados, rectángulos, rombos y paralelogramos recurriendo a las propiedades relativas a sus lados y ángulos, y diagonales" (p. 126) y "utilizar propiedades de cuadriláteros y triángulos para decidir la verdad o falsedad de una afirmación o determinar medidas de ángulos de figuras" (p. 127).

Este abordaje permite la deducción de propiedades relacionadas con magnitudes angulares y longitudinales como:

- La **suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°**, ya que este se conforma por dos triángulos, y los ángulos interiores de cada uno de ellos suman 180°.
- Dados dos segmentos de recta que se bisecan entre sí, es posible construir un **paralelogramo** siempre que dichos segmentos conformen sus dos diagonales, o de manera equivalente, se requiere conocer al menos dos lados y un ángulo para poder construir un paralelogramo único.

e. La conceptualización de la medida

Sobre todo en educación básica, el acto de medir implica una distinción y relación entre tres elementos que intervienen para su conceptualización: medir, unidad de medida y medida (Aparicio, Sosa, Torres y Gómez, 2018).

- **Medir**. Es una actividad o acción que se relaciona con la comparación de dos objetos, propiedades o magnitudes a partir de un tercer objeto como unidad de referencia.
- **Unidad de medida**. Unidad de referencia que permite cuantificar una magnitud. Puede ser convencional o no estandarizada y su uso depende del grado de exactitud que se requiera.
- **Medida**. Cantidad específica que cuantifica los grados o niveles en que se presenta una magnitud o cualidad.

Así, la medición o la actividad de medir está determinada por la naturaleza de lo que se requiere medir (longitudinal, angular, de superficie, tiempo u otro) y el instrumento o unidad de referencia que sea compatible con aquello que se medirá y con el grado de precisión requerido.

En la **imagen 12**, se puede observar cómo la medida de la longitud del libro va a modificarse, puesto que depende de la unidad de referencia, es decir, la medida es de 2 lápices y $\frac{1}{2}$ de otro, o bien de 19 centímetros. La actividad de comparación mediante las distintas unidades de medida se conoce como *medir*, de tal forma que conviene trabajar con las y los estudiantes la idea de que el acto de medir va más allá de usar un instrumento como la regla graduada o de la representación de una medida numérica específica.

Imagen 12. Ejemplificación de la medición de la altura de un libro mediante dos unidades de medida

f. Transición de un trabajo geométrico estático a uno dinámico

La presencia de un enfoque dinámico como parte de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas permite construir ambientes que favorecen el estudio de relaciones de dependencia, funcionales en diversos contextos. Algunos ejemplos de ello se encuentran en el capítulo 3, “Función lineal”, de *Matemática en Red. Tomo 1* (GCABA, 2024e).

En el caso de la geometría, el enfoque dinámico conserva aspectos de movimiento, continuidad y variación, que en el desarrollo del pensamiento geométrico son necesarios para generalizar propiedades como la unicidad o la infinitud en la construcción de figuras geométricas. La propuesta del diseño curricular de GCABA (2015) para el trabajo con los cuadriláteros y el estudio de estas relaciones dinámicas tiene el propósito de reconocer propiedades geométricas como la unicidad en la construcción de cuadriláteros, por ejemplo, “identificar cuándo una colección de datos determina unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros con regla y compás, y cuándo la construcción es imposible” (p. 514).

Además, dentro de la propuesta del diseño curricular de ciclo básico de bachillerato de GCABA (2015) se declara la “construcción de cuadriláteros dados tres o cuatro elementos, así como las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones” (p. 525), esto último mediante tareas que involucran el uso de *software* de geometría dinámica, pues, al permitir el movimiento de los vértices, requiere profundizar sobre el estudio dinámico de las relaciones entre los lados, ángulos y diagonales. A partir del empleo de este tipo de herramientas, se retoma el uso de la *transformación* (trabajada también en el capítulo 4, “Construcción de triángulos”, de *Matemática en Red. Tomo 1*. GCABA, 2024e) para generar una figura a partir de otra, en este caso, un tipo de cuadrilátero a partir de otro, variando sus componentes. Un ejemplo de ello es la siguiente actividad tomada de GCABA (2019a) donde se busca que el estudiantado reconozca que es posible construir una enorme diversidad de paralelogramos dados dos de sus lados.

Imagen 13. *Diseñar para realizar: Las construcciones geométricas. Actividades para estudiantes. Primer año. Serie Educación Técnica* (GCABA, 2019a, p. 10)

Construcción del plano de los cercos de la casita de juegos para jardín **Actividad 3**

En esta actividad se analizará como armar los cercos de la casita.

Primera parte

a. Descarguen el archivo de GeoGebra **Construcción 1 del plano de los cercos**, en el que se dibujaron los esquemas de dos maderas. Construyan un paralelogramo que tenga lados iguales a los dibujados y tenga vértice en E. Registren los pasos que hacen y las herramientas que usan.
- Guarden las construcciones que realizaron.
- Comparen la construcción con las de sus compañeros. ¿Son iguales? ¿Cómo se dieron cuenta?
- Muevan los puntos B y D. ¿El paralelogramo que dibujaron sigue verificando las propiedades pedidas? Si no es así, vuelvan a comenzar.

Construcción 1 del plano de los cercos

b. Descarguen el archivo de GeoGebra **Construcción 2 del plano de los cercos**. Construyan un paralelogramo que tenga lados iguales a los dibujados, el ángulo que los une igual al dibujado y vértice en E. Registren los pasos que hacen y las herramientas que usan.

Construcción 2 del plano de los cercos

Lo anterior atiende lo que Jones (2000) sostiene sobre el uso de los *softwares* de geometría dinámica, esto es, considera que favorece el progreso de las y los estudiantes hacia explicaciones matemáticas más robustas, debido particularmente a su naturaleza dinámica y las características no convencionales de las construcciones geométricas que se pueden producir a partir de ellos.

2.3. Problematización de la matemática escolar

Se presentan las principales ideas fuerza que se sugiere movilizar en las aulas de manera que la construcción de cuadriláteros se vea acompañada de los aspectos de visualización y sentido espacial.

1. Dos características principales e invariantes de un cuadrilátero como figura geométrica son:

- Dados cuatro ángulos, es posible construir un cuadrilátero siempre que la **suma de los**

ángulos interiores sea de 360°. Esta característica puede deducirse del conocimiento previamente desarrollado sobre la suma de los ángulos interiores de todo triángulo y asociando la configuración de un cuadrilátero a la de dos triángulos que comparten un lado común.
- Dados dos segmentos de recta que se bisecan entre sí, es posible construir un **paralelogramo** siempre que dichos segmentos conformen sus dos diagonales.

2. Es necesario transitar entre al menos tres conceptualizaciones del cuadrilátero como figura geométrica.
- Como la unión de cuatro segmentos de recta determinados por una poligonal cerrada.
- Como la configuración espacial de dos triángulos, semejantes o no, unidos por un lado en común.
- Como una relación de medida angular o longitudinal específica que genera su forma característica (por ejemplo, el punto 1 de este listado).

3. La construcción de cuadriláteros no es un objeto matemático en sí mismo, sino que es un tipo de tarea. El objeto geométrico es la figura conocida como *cuadrilátero* y el proceso de construcción es un medio para conocer y conceptualizar la figura como relación de medida.

4. Recurrir al sentido y configuración espacial para desarrollar la percepción de las formas y el espacio[2] que ocupan: perímetro, área, volumen, congruencia, semejanza, etc.

5. Tratar didácticamente la clasificación de los cuadriláteros mediante la configuración espacial de dos triángulos que comparten un lado congruente; de esta manera, las propiedades del cuadrilátero que se genere dependerán de las relaciones de medidas de los triángulos que lo constituyen.

6. El acercamiento didáctico descrito en el punto anterior permite estudiar las diferentes características y propiedades de los cuadriláteros desde la visualización y la transformación de la forma (modificar la medida) con la finalidad de generar nuevos paralelogramos: romboide, cuadrado, rombo, etc.

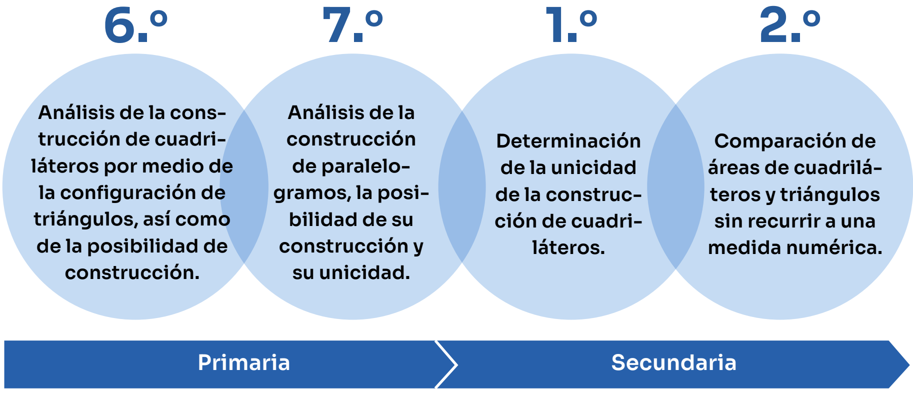
7. Promover las habilidades de percepción, configuración y sentido espacial para el tránsito de la concepción de un dibujo que representa a un cuadrilátero a la visualización de las relaciones de medida que permiten la abstracción de la figura cuadrangular.

2.4. ¿Cómo operativizar las ideas fuerza?

En este apartado, se propone un acercamiento evolutivo para la tarea relativa a la construcción de cuadriláteros que se demanda para el tránsito del segundo ciclo del nivel primario al primer ciclo del nivel secundario, que puede sintetizarse en los siguientes objetivos por año escolar.

2 Sobre la concepción de la noción de espacio propuesta en este documento es indispensable retomar la nota al pie 1 del presente capítulo.

Imagen 14. Propuesta de objetivos por año escolar para el tránsito del contenido *construcción de cuadriláteros*



A continuación, se presenta cómo se expresa cada uno de estos objetivos en los materiales didácticos propuestos para el aula de matemática en los distintos niveles educativos. Si bien desde 4.° grado puede iniciarse el trabajo con figuras geométricas en tanto la identificación de los elementos constitutivos de cada una, se reconoce que el análisis de la construcción de cuadriláteros como tal se inicia en 5.° grado.

5.° grado

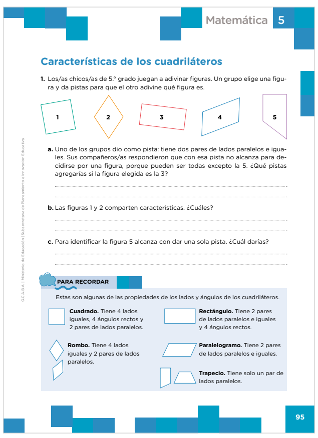
Objetivo: construcción de cuadriláteros mediante la unión de dos triángulos con un lado congruente.

Se plantea un análisis de la construcción de cuadriláteros a partir de la unión de dos triángulos que comparten un lado congruente. Así, se movilizan conocimientos primordiales para la conceptualización del cuadrilátero como figura geométrica.

1. La construcción de un cuadrilátero puede percibirse mediante la unión (configuración espacial) de dos triángulos que comparten un lado congruente, el cual fungirá como una diagonal del cuadrilátero.

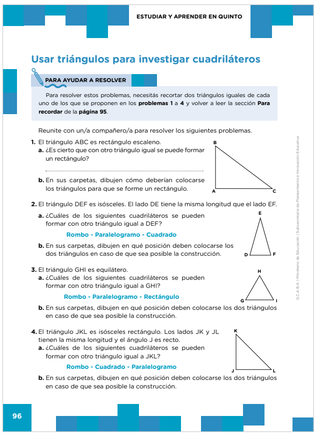
2. Dados cuatro ángulos, será posible la construcción de un cuadrilátero siempre que se garantice que la suma sea igual a 360°.

3. El uso de la regla o escuadra y el compás como instrumentos para medir, trazar y construir cuadriláteros.



“Características de los cuadriláteros”, *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2024b, p. 95)
https://bit.ly/3xlyuXB

En la actividad presentada en esta imagen, se plantea un primer acercamiento al tipo de cuadrilátero que se obtendrá a partir de la unión de dos triángulos mediante un lado congruente. Se pretende identificar qué cuadrilátero resultará respecto al tipo de triángulo que se emplee para su configuración (ver la imagen siguiente).


ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO

Usar triángulos para investigar cuadriláteros

PARA AYUDAR A RESOLVER

Para resolver estos problemas, necesitás recortar dos triángulos iguales de cada uno de los que se proponen en los **problemas 1** a **4** y volver a leer la sección **Para recordar** de la **página 95**.

Reunite con un/a compañero/a para resolver los siguientes problemas.

1. El triángulo ABC es rectángulo escaleno.
   a. ¿Es cierto que con otro triángulo igual se puede formar un rectángulo?
   b. En sus carpetas, dibujen cómo deberían colocarse los triángulos para que se forme un rectángulo.
2. El triángulo DEF es isósceles. El lado DE tiene la misma longitud que el lado EF.
   a. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros se pueden formar con otro triángulo igual a DEF?
   Rombo - Paralelogramo - Cuadrado
   b. En sus carpetas, dibujen en qué posición deben colocarse los dos triángulos en caso de que sea posible la construcción.
3. El triángulo GHI es equilátero.
   a. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros se pueden formar con otro triángulo igual a GHI?
   Rombo - Paralelogramo - Rectángulo
   b. En sus carpetas, dibujen en qué posición deben colocarse los dos triángulos en caso de que sea posible la construcción.
4. El triángulo JKL es isósceles rectángulo. Los lados JK y JL tienen la misma longitud y el ángulo J es recto.
   a. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros se pueden formar con otro triángulo igual a JKL?
   Rombo - Cuadrado - Paralelogramo
   b. En sus carpetas, dibujen en qué posición deben colocarse los dos triángulos en caso de que sea posible la construcción.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

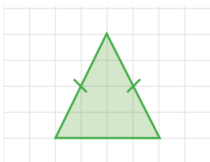
96

"Usar triángulos para investigar cuadriláteros", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2024b, p. 96)
https://bit.ly/4c7enLQ

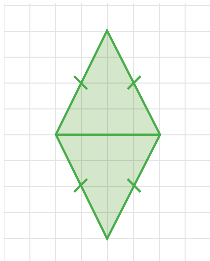
El empleo de triángulos como base para la configuración de cuadriláteros permite explorar, a partir de la semejanza y la congruencia de pares de triángulos, otras relaciones propias de los cuadriláteros, además de su clasificación; por ejemplo, un rombo es un cuadrilátero formado por la unión de dos triángulos isósceles o equiláteros congruentes, de forma tal que sus cuatro lados tienen igual medida, pero no necesariamente sus cuatro ángulos tienen la misma medida.

El siguiente ejemplo muestra la configuración de dos triángulos isósceles congruentes para generar un par de cuadriláteros distintos entre sí (cuadriláteros 1 y 2), según el lado congruente que se considere como diagonal.

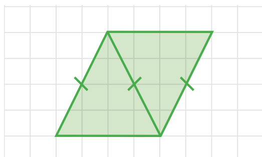
Imagen 15. Ejemplo de la construcción de un paralelogramo a partir de la configuración espacial por unión de dos triángulos isósceles congruentes



Triángulo isósceles

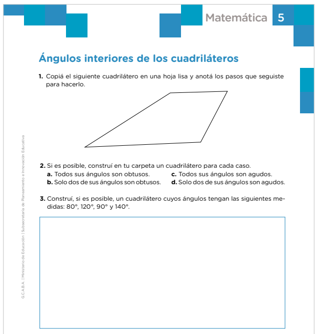


Cuadrilátero 1: rombo



Cuadrilátero 2: paralelogramo

Se trabaja también con la relación de medida angular en la que la suma interna de los cuatro ángulos de un cuadrilátero debe sumar 360 grados mediante una indagación como la que se muestra en la **actividad 2** de la siguiente imagen, en la que se solicita verificar si es posible la construcción de un cuadrilátero a partir del tipo de ángulo o ángulos propuestos.


Matemática 5

Ángulos interiores de los cuadriláteros

1. Copiá el siguiente cuadrilátero en una hoja lisa y anotá los pasos que seguiste para hacerlo.

2. Si es posible, construí en tu carpeta un cuadrilátero para cada caso.
a. Todos sus ángulos son obtusos.
b. Solo dos de sus ángulos son obtusos.
c. Todos sus ángulos son agudos.
d. Solo dos de sus ángulos son agudos.

3. Construí, si es posible, un cuadrilátero cuyos ángulos tengan las siguientes medidas: 80°, 120°, 90° y 140°.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

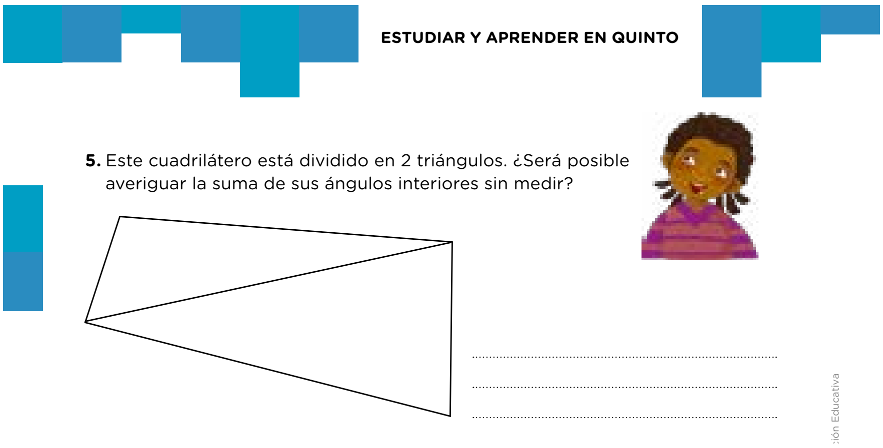
PDF

“Ángulos interiores de los cuadriláteros”, *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2024b, p. 97)
https://bit.ly/3xzSNjX

En este caso, se espera que, mediante el análisis de las construcciones, se reconozca que no es posible construir un cuadrilátero empleando cuatro medidas de ángulos, todos agudos o bien todos obtusos. Dicha imposibilidad de construcción del cuadrilátero se complementa con la **actividad 3**, en la que se propone analizar la construcción de un nuevo cuadrilátero a partir de un ángulo agudo, uno recto y dos obtusos, en los que, al sumar los ángulos, se obtendría 80° + 120° + 90° + 140° = 430°.

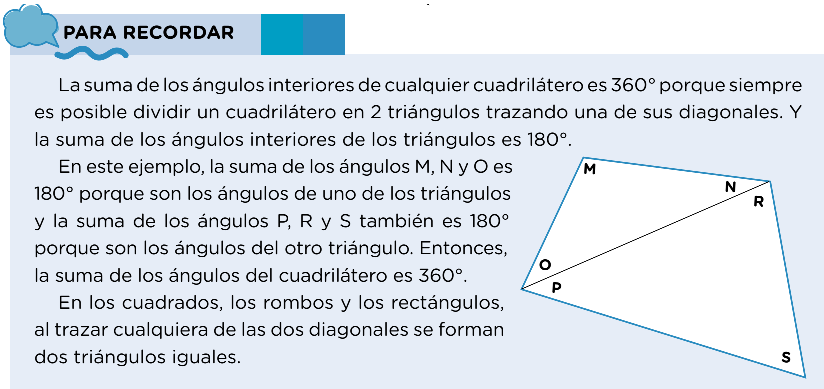
Lo anterior se argumenta mediante el análisis de la reorganización espacial de dos triángulos que comparten un lado congruente para configurar un cuadrilátero y, dado que ya se reconoce la propiedad angular para la construcción de todo triángulo, es decir, que la suma interna de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°, se puede concluir que la suma de los ángulos internos de dos triángulos que conforman a cualquier cuadrilátero será equivalente a 360°, como se puede observar en el apartado “Para recordar” de *Estudiar y aprender en Quinto* (p. 98).

Imagen 16. “Ángulos interiores de los cuadriláteros. Actividad 5”, *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2024b, p. 98)


ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO

5. Este cuadrilátero está dividido en 2 triángulos. ¿Será posible averiguar la suma de sus ángulos interiores sin medir?

Imagen 17. “Para recordar”, *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2024b, p. 98)


PARA RECORDAR

La suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es 360° porque siempre es posible dividir un cuadrilátero en 2 triángulos trazando una de sus diagonales. Y la suma de los ángulos interiores de los triángulos es 180°.

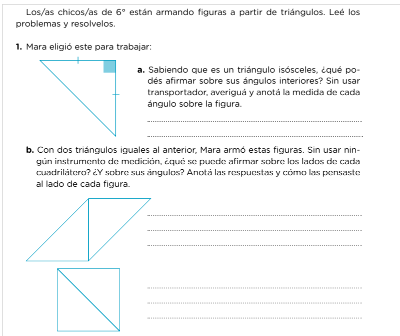
En este ejemplo, la suma de los ángulos M, N y O es 180° porque son los ángulos de uno de los triángulos y la suma de los ángulos P, R y S también es 180° porque son los ángulos del otro triángulo. Entonces, la suma de los ángulos del cuadrilátero es 360°.

En los cuadrados, los rombos y los rectángulos, al trazar cualquiera de las dos diagonales se forman dos triángulos iguales.

6.° grado

Objetivo: análisis de la construcción de cuadriláteros por medio de la configuración de triángulos, así como de la posibilidad de construcción.

Se inicia consolidando lo visto en 5.° grado respecto a que todo cuadrilátero se puede construir a partir de la unión o configuración de dos triángulos, y se hace hincapié en que el tipo de cuadrilátero que se generará depende de las propiedades y relaciones de medida entre los triángulos empleados.


Los/as chicos/as de 6° están armando figuras a partir de triángulos. Leé los problemas y resolvelos.

1. Mara eligió este para trabajar:

a. Sabiendo que es un triángulo isósceles, ¿qué podés afirmar sobre sus ángulos interiores? Sin usar transportador, averiguá y anotá la medida de cada ángulo sobre la figura.

b. Con dos triángulos iguales al anterior, Mara armó estas figuras. Sin usar ningún instrumento de medición, ¿qué se puede afirmar sobre los lados de cada cuadrilátero? ¿Y sobre sus ángulos? Anotá las respuestas y cómo las pensaste al lado de cada figura.

“Triángulos y cuadriláteros”, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2024c, p. 117)
https://bit.ly/3zabPxW

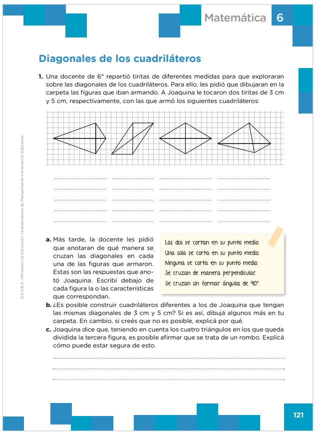
En particular, los conocimientos que se promoverán en este grado giran en torno a los siguientes aspectos.

1. Empleo de instrumentos como la regla no graduada y el compás para la construcción de cuadriláteros.

2. Análisis de la construcción de cuadriláteros por la unión o configuración de dos triángulos, a partir de:
- **a.** el tipo o las características de los triángulos empleados,
- **b.** el lado congruente que se utilice como diagonal.

3. Las posibilidades de construcción a partir del análisis de las diagonales de un cuadrilátero.

Para el análisis de la posibilidad de construcción de un cuadrilátero dadas ciertas consideraciones sobre sus diagonales, se proponen actividades como las que se muestran en la siguiente imagen, en las que se analiza si las diagonales pueden ser de igual medida, si pueden intersectarse formando ángulos rectos o bien si se cortan en sus puntos medios, con el fin de establecer si un cuadrilátero podrá construirse o si existe la posibilidad de tener una variedad de cuadriláteros a partir de dos diagonales con determinada medida.


Matemática 6

Diagonales de los cuadriláteros

1. Una docente de 6° repartió tiritas de diferentes medidas para que exploraran sobre las diagonales de los cuadriláteros. Para ello, les pidió que dibujaran en la carpeta las figuras que iban armando. A Joaquina le tocaron dos tiritas de 3 cm y 5 cm, respectivamente, con las que armó los siguientes cuadriláteros:

a. Más tarde, la docente les pidió que anotaran de qué manera se cruzan las diagonales en cada una de las figuras que armaron. Estas son las respuestas que anotó Joaquina. Escribí debajo de cada figura la o las características que correspondan.

Las dos se cortan en su punto medio.
Una sola se corta en su punto medio.
Ninguna se corta en su punto medio.
Se cruzan de manera perpendicular.
Se cruzan sin formar ángulos de 90°.

b. ¿Es posible construir cuadriláteros diferentes a los de Joaquina que tengan las mismas diagonales de 3 cm y 5 cm? Si es así, dibujá algunos más en tu carpeta. En cambio, si creés que no es posible, explicá por qué.

c. Joaquina dice que, teniendo en cuenta los cuatro triángulos en los que queda dividida la tercera figura, es posible afirmar que se trata de un rombo. Explicá cómo puede estar segura de esto.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa

121

"Diagonales de los cuadriláteros", *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2024c, p. 121)
https://bit.ly/3VuL6DG

Tal es el caso de la **actividad 2** (**imagen 18**) en la que se desarrolla la argumentación acerca de la posibilidad de la construcción de un cuadrilátero o la posibilidad de tener más de una construcción.

Imagen 18. "Diagonales de los cuadriláteros. Actividad 2", *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2024c, p. 122)

2. Teniendo como diagonales dos segmentos de 5 cm y 8 cm, respondé en tu carpeta.
a. ¿Es posible armar más de un rombo? Explicá por qué.
b. ¿Y es posible construir más de un paralelogramo propiamente dicho? Explicá por qué.

Se deberá identificar que una relación de medida que caracteriza la existencia de un rombo como figura geométrica consiste en que las diagonales se bisecan entre sí formando un ángulo recto. Por ello, dados los dos segmentos diagonales con medidas específicas, se limita la construcción a un único rombo, mientras que, para la construcción de una diversidad de paralelogramos, solo se requiere que los segmentos diagonales se bisequen entre sí en cualquier medida angular.

7.° grado

Objetivo: Análisis de la construcción de paralelogramos, la posibilidad de su construcción y su unicidad.

Se continúa con la exploración de las relaciones y configuraciones entre triángulos y cuadriláteros; en particular, se centra el análisis en los paralelogramos. En este sentido, se pretende favorecer:

- El análisis de la posibilidad de construcción de paralelogramos a partir de la unión o reconfiguración de dos triángulos, prestando atención a:
  - si es posible generar diversos paralelogramos a partir de las medidas de sus lados y sus diagonales,
  - el análisis de las relaciones de medida que aseguran la unicidad de construcción de un paralelogramo.
- El análisis de los ángulos interiores de los paralelogramos.

De tal forma, se inicia 7.º grado reforzando la propiedad de que todo cuadrilátero puede ser construido a partir de la unión de dos triángulos con un lado en común que fungirá como diagonal, lo que permite, de igual forma, retomar la propiedad de que la suma interna de los ángulos de cualquier cuadrilátero siempre será equivalente a 360°.

Imagen 19. "Relaciones entre triángulos y paralelogramos. Actividad 3", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d, p. 76)

3. Este triángulo es la mitad de un paralelogramo en el que una de sus diagonales es el segmento AD. Construí el paralelogramo usando los instrumentos que necesites.

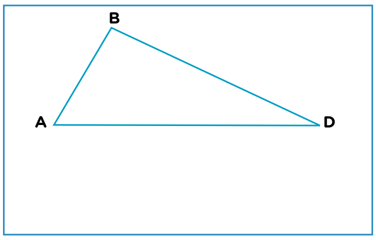


Imagen 20. "Relaciones entre triángulos y paralelogramos. Actividades 6 y 7", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d, p. 77)

6. Construí en tu carpeta un paralelogramo que tenga un lado de 7 cm y otro de 4 cm. ¿Es posible construir otros paralelogramos diferentes con estos datos?

7. Construí en tu carpeta un paralelogramo que tenga un lado de 7 cm, otro de 4 cm y una diagonal de 10 cm. ¿Es posible construir otros paralelogramos diferentes con estos datos?

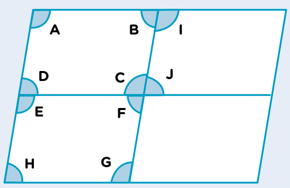
Mediante actividades como las de la **imagen 20**, se analiza si, a partir de las relaciones de medida entre los lados y las diagonales, es posible construir más de un paralelogramo.

Respecto a las relaciones de medida angulares en paralelogramos, se trabaja principalmente para inferir dos propiedades de los paralelogramos: dos ángulos consecutivos suman 180 grados y los ángulos opuestos miden lo mismo (ver **imagen 21**).

Imagen 21. "Ángulos interiores de los paralelogramos. Para recordar", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d, p. 82)

PARA RECORDAR

Una propiedad de los paralelogramos es que dos ángulos consecutivos suman 180°. Para demostrar esto, podemos usar esta figura que tiene cuatro paralelogramos iguales. Por un lado A = I porque es el mismo ángulo en los dos paralelogramos. Además, como B + I = 180°, entonces B + A = 180°. De la misma forma, se puede concluir que D y C suman 180°, al igual que A y D, y B con C.



Otra propiedad de los paralelogramos es que los ángulos opuestos son iguales. Para demostrar esto, nuevamente podemos usar la misma figura. Como C + J = 180° y C + F = 180°, entonces C + J = C + F. Para que esta igualdad se cumpla, necesariamente J = F. Además, como H = J por ser el mismo ángulo en los dos paralelogramos, entonces H = F. De la misma manera, se puede concluir que E = G.

Así, en la **actividad 1** de la **imagen 22** se propone el uso de las propiedades antes inferidas con el fin de identificar la medida del ángulo M, dada la información de una medida angular de 80°, tal como se muestra en la imagen.

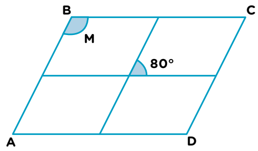
Imagen 22. “Ángulos interiores de los paralelogramos. Actividad 1”, *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d, p. 82)

1. En la siguiente figura, ABCD es un paralolegramo formado por 4 paralelogramos iguales. Averiguá, sin medir, la amplitud del ángulo M. Explicá cómo lo pensaste.

....

....

....



1.° año

Objetivo: Determinar la unicidad en la construcción de cuadriláteros.

Se comienza el 1.° año con el análisis de la construcción de diversos cuadriláteros mediante el *software* de geometría dinámica GeoGebra. Por ello, se sugiere el uso de la secuencia didáctica *Diseñar para realizar: Las construcciones geométricas. Primer año* (GCABA, 2019b). En general, este material favorece didácticamente que (p. 31):

- Se pueden construir infinitos paralelogramos dados dos de sus lados si no se conocen las medidas de sus ángulos. Sin embargo, dados los lados y un ángulo, la construcción es única.
- Dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos, no siempre se puede construir el paralelogramo. Para que sea posible, la medida del otro lado (el que no es referente para trazar la altura) tiene que ser mayor que la medida de la altura. En ese caso, la construcción será única.
- Se puede construir un único rectángulo dadas las medidas de sus lados, porque al hablar de rectángulo ya se conocen las medidas de sus ángulos.
- Se pueden construir infinitos rombos dada la medida de sus lados, pero un solo cuadrado, dado que se conocen también los ángulos.

En particular, se proponen actividades como las que se presentaron en la **imagen 13** de este capítulo, en las cuales se promueve la construcción de paralelogramos dados dos lados (primera parte, inciso a), así como dos lados dados y un ángulo (primera parte, inciso b), lo que permite generar una reflexión acerca de la colección de elementos que son necesarios para asegurar la construcción única de un paralelogramo.

También se propone el desarrollo de la **actividad 3c** de la imagen siguiente, a partir del cual se analiza la posibilidad de la unicidad del paralelogramo dada la medida de dos de sus lados consecutivos y la altura trazada respecto a uno de ellos; esto es, la construcción será única solo si se verifica que la medida de la altura trazada respecto a uno de los lados es de igual o menor medida que el segundo lado dado, pues, de no ser así, la construcción será imposible (ver **imagen 23**).

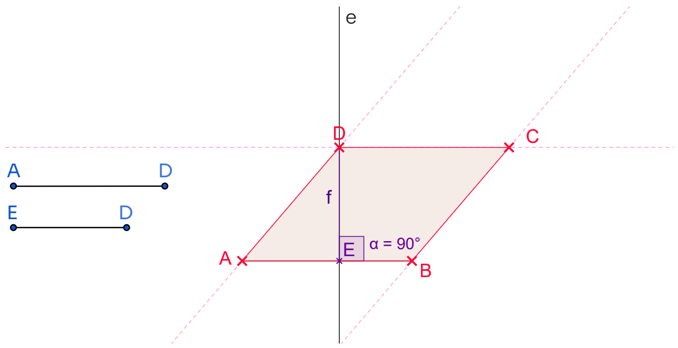
c. Descarguen el archivo de GeoGebra **Construcción 3 del plano de los cercos**. Construyan un paralelogramo que tenga lados iguales a dos de los dibujados, altura igual al tercero y vértice en E. Registren los pasos que hacen y las herramientas que usan.

- Guarden las construcciones que realizaron.
- Comparen la construcción con las de sus compañeros. ¿Son iguales? ¿Cómo se dieron cuenta?
- Muevan los puntos B y D. ¿El paralelogramo que dibujaron sigue verificando las propiedades pedidas? Si no es así, vuelvan a comenzar.

Construcción 3 del plano de los cercos

Diseñar para realizar: Las construcciones geométricas. Actividades para estudiantes. Primer año (GCABA, 2019b, p. 11)
https://bit.ly/3za2BSe

Imagen 23. Ejemplo de la construcción de un paralelogramo a partir de dos de sus lados y su altura



El segmento ED representa la altura del paralelogramo trazada respecto al lado AB

La implementación de las actividades anteriores, así como del uso de la herramienta de geometría dinámica, permite favorecer el uso de la transformación geométrica, por ejemplo, modificar las relaciones de medida para generar un rectángulo a partir de un paralelogramo.

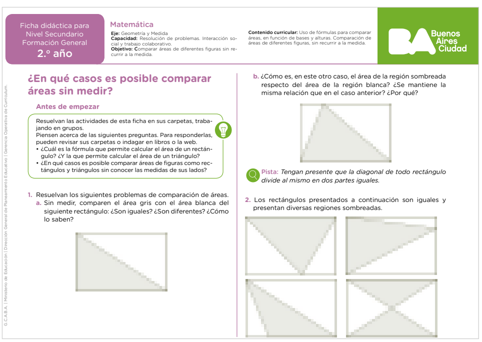
2.° año

Objetivo: Comparar áreas de cuadriláteros y triángulos sin la necesidad de recurrir a una medida numérica.

Para consolidar el trabajo respecto al tipo de cuadriláteros que se pueden construir, su existencia y unicidad, a partir de un conjunto de datos o medidas dadas, se recomienda emplear las actividades de *Matemática. Construcciones de cuadriláteros con GeoGebra. Actividades para los estudiantes. Segundo año* (GCABA, 2018a).

Además, en segundo año, conviene profundizar en la relación de la construcción de triángulos y cuadriláteros a partir del análisis de la medida de sus áreas. Por ejemplo, en la ficha didáctica *¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir?* (GCABA, s/f) se analiza la posibilidad de establecer la medida del área de la región sombreada sin la necesidad de emplear una medida numérica específica.

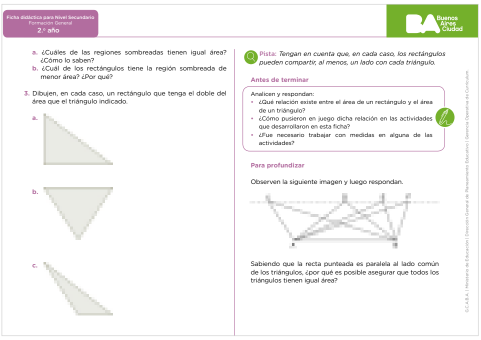
Para ello, se requiere hacer uso de propiedades sobre los cuadriláteros para argumentar sobre las relaciones de medida necesarias para poder comparar áreas. Por ejemplo, en la **actividad 1a** de la ficha mencionada, se puede argumentar la igualdad en medidas de área mediante la conceptualización de que todo rectángulo es un cuadrilátero formado por la unión de dos triángulos rectángulos congruentes, de forma tal que la hipotenusa se corresponde a la diagonal, o bien considerar que la diagonal es un segmento que divide a todo rectángulo en dos figuras congruentes.



¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir? (GCABA, s/f, p. 1)
https://bit.ly/3XCo4NI

Para el **inciso 1b**, se requiere la identificación de los segmentos que determinan la base y la altura del triángulo rectángulo formado en **1a**, y su coincidencia en medida, tanto con la base y la altura del triángulo sombreado en **1b** como con la del rectángulo **1b**. Este reconocimiento será el argumento para plantear que el triángulo conformado por la sección sombreada en **1b** tiene la misma medida de área que en el **inciso 1a** y, por lo tanto, que la región blanca solicitada (relación de transitividad de medidas).

Esta conclusión matemática será base para el planteamiento siguiente: en todo rectángulo que comparte la misma medida de base y altura que un triángulo, la medida del área de la primera figura geométrica será el doble que la de la segunda. Lo anterior se refuerza con la **actividad 2**, en la que será necesario identificar, entre los cuatro rectángulos, cuáles cuentan con las regiones sombreadas de igual medida y en qué casos la medida de área es menor o mayor.


Ficha didáctica para Nivel Secundario
Formación General
2.° año

a. ¿Cuáles de las regiones sombreadas tienen igual área? ¿Cómo lo saben?
b. ¿Cuál de los rectángulos tiene la región sombreada de menor área? ¿Por qué?

3. Dibujen, en cada caso, un rectángulo que tenga el doble del área que el triángulo indicado.

a.

b.

c.

Pista: *Tengan en cuenta que, en cada caso, los rectángulos pueden compartir, al menos, un lado con cada triángulo.*

Antes de terminar

Analicen y respondan:
- ¿Qué relación existe entre el área de un rectángulo y el área de un triángulo?
- ¿Cómo pusieron en juego dicha relación en las actividades que desarrollaron en esta ficha?
- ¿Fue necesario trabajar con medidas en alguna de las actividades?

Para profundizar

Observen la siguiente imagen y luego respondan.

Sabiendo que la recta punteada es paralela al lado común de los triángulos, ¿por qué es posible asegurar que todos los triángulos tienen igual área?

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir?
(GCABA, s/f, p. 2)
https://bit.ly/45B7vnp

La **actividad 3** consolida la relación entre las medidas de área empleada en la **actividad 2** en tres tipos de triángulos: rectángulo, equilátero y escaleno.

Imagen 24. Ejemplos de rectángulos construidos con el doble de medida de área que un triángulo rectángulo dado

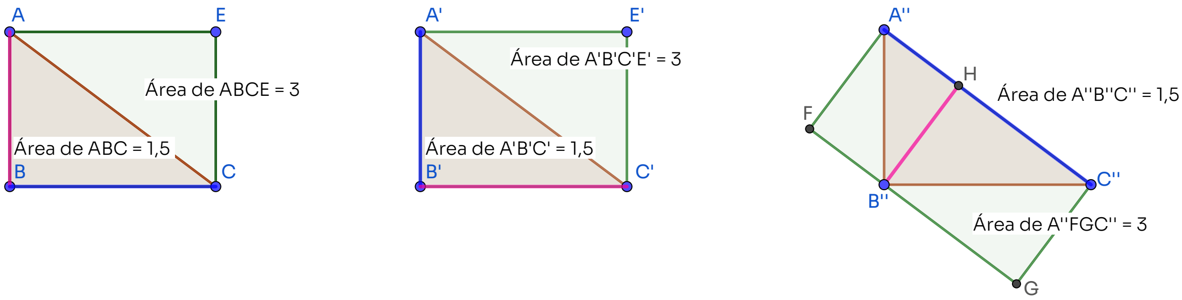


Imagen 25. Ejemplos de rectángulos construidos con el doble de medida de área que un triángulo equilátero dado

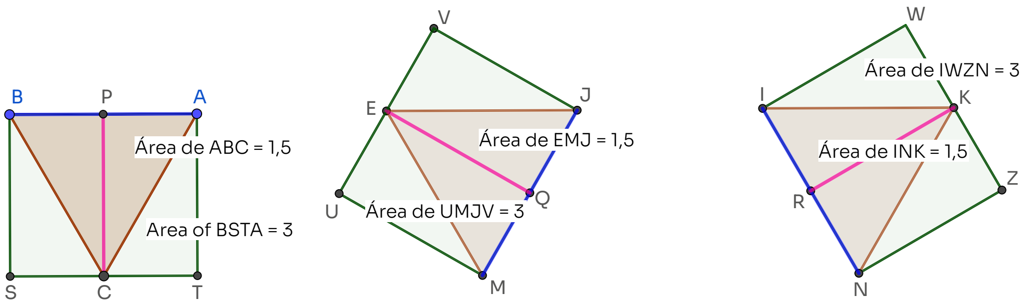
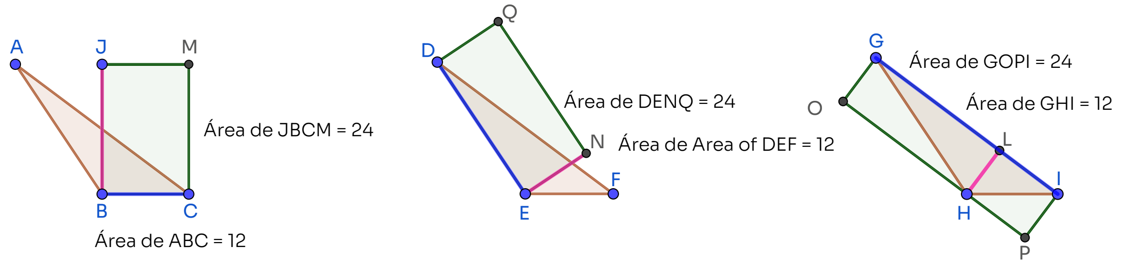


Imagen 26. Ejemplos de rectángulos construidos con el doble de medida de área que un triángulo escaleno dado

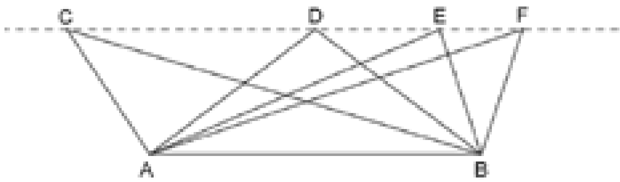


Se concluye con la actividad de profundización en la que se espera que las y los estudiantes logren generalizar la relación *base × altura* como condición para argumentar la medida de área invariante de todos los triángulos representados, independientemente del cambio de forma. En la **imagen 27** se observan triángulos escalenos y un triángulo equilátero que comparten la base AB y la misma medida de altura, dado que los vértices que se emplean como referencia para establecer las alturas de cada uno coinciden en que todos están sobre la recta paralela al lado AB.

Imagen 27. *¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir?* (GCABA, s/f, p. 2)

Para profundizar

Observen la siguiente imagen y luego respondan.



Sabiendo que la recta punteada es paralela al lado común de los triángulos, ¿por qué es posible asegurar que todos los triángulos tienen igual área?

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivo del año escolar	Análisis de la construcción de cuadriláteros por medio de la configuración de triángulos, así como de la posibilidad de construcción.	Análisis de la construcción de paralelogramos, la posibilidad de su construcción y su unicidad.	Determinación de la unicidad de la construcción de cuadriláteros.	Comparación de áreas de cuadriláteros y triángulos sin recurrir a una medida numérica.
Ideas fuerza	• Identificar la forma geométrica del cuadrilátero y los elementos que lo constituyen: lados, ángulos, vértices. • Uso de los instrumentos como la regla y el compás para la construcción del cuadrilátero. • Movilizar la percepción y visualización espacial para configurar un cuadrilátero por la unión de dos triángulos.	• Elaboración de argumentos que fundamenten la validez del procedimiento de construcción de un cuadrilátero. • Inferencia de las características invariantes de un cuadrilátero o, en específico, de un paralelogramo: dos diagonales que se bisecan y suma de sus ángulos internos. • Movilizar la percepción y visualización espacial.	• Enunciar y validar o descartar afirmaciones de construcción de cuadriláteros. • Caracterizar las propiedades de los cuadriláteros desde la visualización y transformación de la forma (modificar la medida) con la finalidad de generar nuevos paralelogramos: romboide, cuadrado, rombo, etc. • Argumentar la unicidad o no en la construcción de un cuadrilátero.	• Transitar entre tres conceptualizaciones del cuadrilátero: como unión de segmentos, como unión de triángulos y como relación de medida. • Construcción de cuadriláteros mediante la duplicación de la medida de área de un triángulo.
Preguntas clave	•¿Qué propiedades geométricas de los triángulos garantizan la construcción de un cuadrilátero específico (cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, etc.)?	¿Qué información geométrica es necesaria y suficiente para garantizar la construcción de un paralelogramo y verificar su unicidad?	¿Cuáles son las condiciones de medidas longitudinales y angulares necesarias y suficientes para garantizar que se puede construir un paralelogramo o una variedad de ellos?	¿Qué relaciones de medida se requieren cumplir para garantizar que la medida de área de un rectángulo es el doble de la de un triángulo?
Materiales propuestos	• *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2024c)	• *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2024d)	• *Diseñar para realizar: Las construcciones geométricas. Actividades para estudiantes. Primer año.* Actividades 3 y 4 (GCABA, 2019b)	• *¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir?* Ficha didáctica 2.º de secundaria (GCABA, s/f) • *Construcciones de cuadriláteros con GeoGebra. Actividades para los estudiantes. Segundo año* (GCABA, 2018a)

Capítulo 3. Teorema de Thales

3.1. Ubicación curricular

Se presentan los objetivos curriculares relativos al contenido de **teorema de Thales** en el ciclo básico de educación secundaria. Para la revisión, se considerarán documentos publicados por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (GCABA).

Tabla 9. Síntesis de ubicación curricular del contenido

Unidad de análisis	Secundaria	
Nivel	**1.°**	**2.°**
Objetivos curriculares	*Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2ª ed., 2015) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)	
	• Construir rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás. • Recurrir a criterios de igualdad de triángulos y a las relaciones de ángulos entre paralelas para resolver diversos tipos de problemas. (p. 514)	• Comparar áreas de diferentes figuras sin recurrir a la medida. • Apelar al teorema de Thales para resolver diferentes tipos de problemas. (p. 521)
Alcances planteados desde la propuesta actual	• Producción de nuevas propiedades de las figuras.	• Empleo de la noción de área como magnitud. • Identificar que la construcción de triángulos constituye un punto de apoyo para las construcciones de polígonos en general.

3.2. Contextualización disciplinar

El teorema de Thales expresa la generalización de una relación geométrica entre segmentos semejantes que permea diversas áreas del conocimiento matemático, como la aritmética, el álgebra e incluso el análisis, por ejemplo, para la medición de longitudes o distancias, para la división de segmentos de recta en partes proporcionales o bien para generar una infinidad de segmentos proporcionales. Lo anterior permite trabajar con distancias mediante el doble, el triple o la cuarta parte de otra, sin conocer necesariamente las cantidades de manera exacta.

Sin embargo, este resultado suele tener poco protagonismo en el escenario escolar, quizás debido a las diferentes dificultades en torno a su enseñanza y aprendizaje, o a las formas en las que se ha llevado a cabo su transposición didáctica a lo largo de la historia (Brousseau, 1995; Michonneau y Pfaff, 1990; Climent *et al*., 2021). Y es que, si bien formalmente el teorema de Thales se aborda en segundo y hasta tercer año de secundaria, los conceptos fundamentales para su enseñanza se construyen desde la escuela primaria, y estos fundamentos se desarrollan por medio del estudio de las relaciones de proporcionalidad a partir de 4.º grado de primaria (GCABA, 2014), las relaciones longitudinales y angulares en los triángulos en 6.º y 7.º grado (GCABA, 2012), la semejanza de triángulos en 2.º año de secundaria y finalmente a la profundización en dichas relaciones mediante las nociones de paralelismo y la comparación de áreas mediante propiedades geométricas diversas en secundaria (GCABA, 2015).

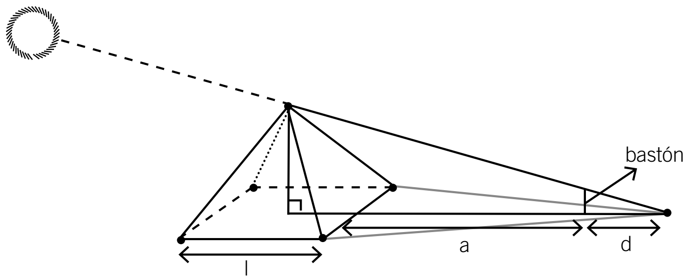
a. Elementos base para la introducción al teorema de Thales

Históricamente, se sabe que la conjetura sobre las relaciones geométricas involucradas en el teorema de Thales proviene de la necesidad de **estimar distancias que físicamente resultan inaccesibles**.

> En su viaje a Egipto, Tales quedó sorprendido por la altura de la pirámide de Keops, la cual pensó en medir sin tener que subir a la pirámide. Hay dos versiones reportadas en la literatura; una de ellas descrita por Hycronyms, discípulo de Aristóteles, relata que Tales habría medido la longitud de la sombra de la pirámide cuando era igual a su altura. El segundo, relacionado con Plutarco, dice que el matemático clavó un palo en el suelo y, utilizando la similitud de los triángulos, pudo determinar la altura de la pirámide de Keops. (Eves, 2004, p. 95)

Se reconoce, entonces, que la relación entre la altura de la pirámide y la longitud de su sombra era igual a la relación entre su altura (o la altura del bastón) y la longitud de la respectiva sombra.

Imagen 28. Representaciones del uso del teorema de Thales en el contexto de estimación de la altura de una pirámide (GCABA, 2007, p. 82)



Por ello, una manera de introducir escolarmente esta relación geométrica es mediante la semejanza de triángulos, ya que resulta una estrategia familiar a los conocimientos previamente desarrollados para las y los estudiantes. Sin embargo, dicho acercamiento no es suficiente para la comprensión de las relaciones entre las magnitudes involucradas (Brousseau, 1995). Por ejemplo, desde un punto vista cognitivo, el tránsito de la semejanza a la homotecia involucra un isomorfismo de medidas que, como se mostró en el capítulo “Proporcionalidad directa” (GCABA, 2024f), requiere de un razonamiento *intra*, es decir, una relación funcional entre magnitudes distintas. En este caso, la idea de un **coeficiente de proporcionalidad** se corresponde con la de una proyección en el espacio.

En atención a lo anterior, y en vías de favorecer la conceptualización de este teorema, una de las relaciones indispensables que trabajar es la de paralelismo, la cual, en palabras de Brousseau (1995), “no parece estar vinculada a ninguna necesidad evidente en la escuela: está ahí, pero ya está y hay que conocerla” (p. 21), por lo que resulta necesario promover construcciones que lleven a poner el protagonismo en este tipo de relación.

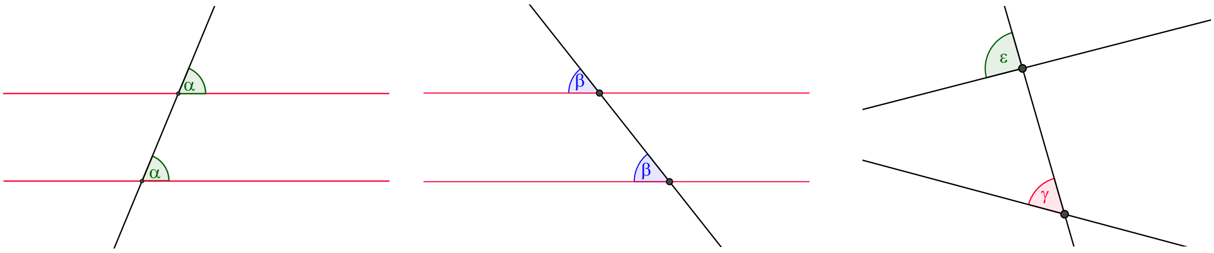
De esta manera, se reconoce al paralelismo como una forma de relacionar dos rectas o segmentos de rectas a partir de la equidistancia (característica de distancia invariante entre ellas), conocimiento que sostiene como recurso didáctico al teorema de Thales, ya que permite verificar las relaciones de medida angulares y longitudinales asociadas (ver idea fuerza 3 del **apartado 3.3** del presente capítulo).

b. Estudio de las relaciones angulares entre rectas paralelas y transversales

Desde un punto de vista relacional, dos rectas pueden ser perpendiculares, oblicuas o paralelas entre sí. Por ejemplo, dos rectas que mantienen una distancia constante entre ellas mantienen una relación de paralelismo.

De esta manera, una estrategia para verificar si dos rectas o más son paralelas consiste en emplear las propiedades de los ángulos que se forman cuando son cortadas por una transversal, esto es, dicha recta transversal corta a ambas rectas simultáneamente y, si la inclinación o ángulo de corte se mantiene en ambas rectas, entonces estas se relacionan de forma paralela, equidistantes entre sí (ver **imagen 29**).

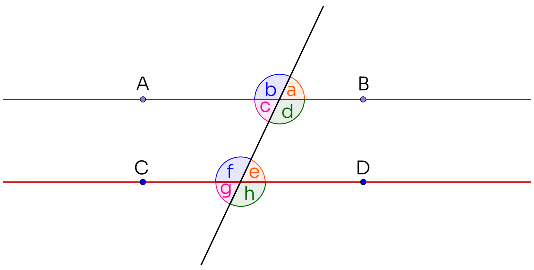
Imagen 29. Ejemplos de la relación de pares de rectas según los ángulos que se forman al cortarlas por una transversal



Como se observa en la tercera figura presentada en la **imagen 29**, puesto que no se conserva en ambas rectas la misma amplitud angular al ser cortadas por la transversal, puede argumentarse que no son paralelas, pues no mantienen la misma medida de distancia en todos los puntos que las conforman.

En la siguiente imagen se muestran dos rectas paralelas y una recta que las corta transversalmente (recta transversal).

Imagen 30. Ángulos que se forman en rectas paralelas cortadas por una recta transversal



En esta configuración se representan relaciones angulares básicas como:

- cualesquiera dos ángulos adyacentes son suplementarios (suman 180°),
- los pares de ángulos a y c, b y d, e y g, f y h son opuestos por el vértice,
- los pares de ángulos a y e, b y f, c y g, d y h son correspondientes,
- los pares de ángulos a y g, b y h son alternos externos, y
- los pares de ángulos c y e, d y f son alternos internos.

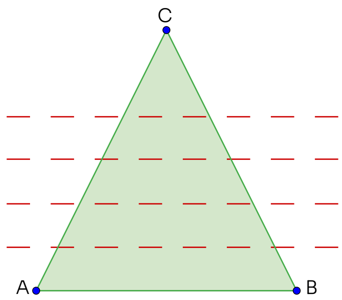
Así, por todo lo analizado previamente, los pares de ángulos alternos internos y externos, y los correspondientes, que se forman en un par de rectas paralelas al ser cortadas por una transversal, mantendrán la misma medida. Dicha propiedad permite fundamentar la construcción de triángulos semejantes, como se trabajará en el presente capítulo, cuyo propósito es aportar en la resignificación del teorema de Thales.

c. El trabajo con representaciones

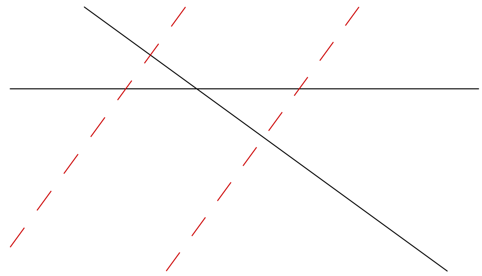
Diversas investigaciones, como las de Climent *et al*. (2021), Lemonidis (1992), Duperret

(1995) y Brousseau (1995), destacan dos tipos de representaciones figurales del teorema de Thales, las homotéticas de tipo “pico” o triángulos anidados y las de tipo “mariposa” (ver **imagen 31**). Las primeras son las mayormente reconocidas por las y los estudiantes.

Imagen 31. Representaciones escolares asociadas al teorema de Thales



Representación tipo pico o triángulos anidados



Representación tipo mariposa

La representación de triángulos anidados, además de restringir la comprensión de la razón en triángulos homotéticos, también propicia que las y los estudiantes no logren reconocer la necesidad del teorema en otro tipo de situaciones.

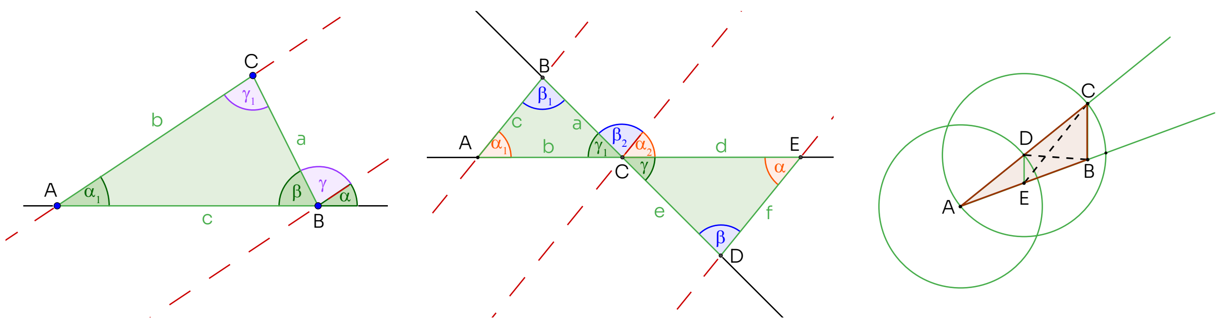
Así, para el estudio del teorema de Thales, se propone el tránsito de una configuración espacial a partir de la construcción de un triángulo (ver **imágenes 38 y 39**), pasando por la construcción de triángulos semejantes (ver **imágenes 40 y 45**), hacia la argumentación del teorema con base en la comparación de áreas de triángulos (ver **imágenes 47, 48, 49 y 50**).

Lo anterior busca favorecer una conceptualización con enfoque relacional y espacial del teorema y su visualización desde distintas perspectivas en situaciones diversas. Se pone de relieve, entonces, la importancia de las representaciones no prototípicas del teorema para movilizar su funcionalidad hacia la conceptualización de otras nociones matemáticas, como la de homotecia.

d. El papel de las configuraciones espaciales y lo relacional

Como se planteó en el apartado anterior, la literatura especializada enfatiza la necesidad de introducir el teorema de Thales a partir de configuraciones espaciales no prototípicas, con la finalidad de profundizar en las relaciones geométricas y no privilegiar solo las relaciones aritméticas que emergen de este resultado.

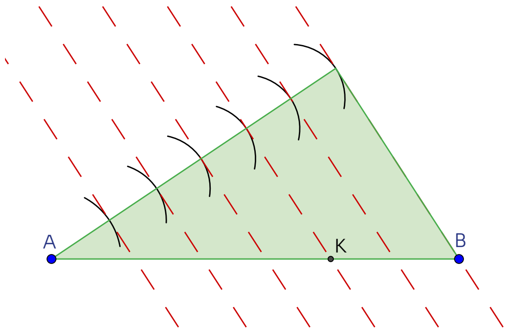
Imagen 32. Ejemplos de distintas configuraciones triangulares para estudiar el teorema de Thales



La configuración espacial de triángulos organizados como se muestra en la imagen anterior complementa la que se suele usar para el trabajo con la semejanza, de forma tal que, con el uso de todas ellas, se pueda profundizar en el teorema desde distintos enfoques: construcción de triángulos, semejanza de triángulos y comparación de áreas, e incluso con vías, en caso de requerirlo, a la noción de homotecia.

Una ventaja de transitar por estos enfoques es la consolidación de las bases necesarias para trabajar la generalización de propiedades que pongan en funcionamiento, por ejemplo, la relación de homotecia, dotando de sentido a la construcción de múltiples paralelas y sus implicaciones en las relaciones entre los triángulos que se construyen a partir de ellas (ver **imagen 33**). El trayecto previamente descrito se propone en contraposición al recorrido tradicional, que inicia con la proporcionalidad de segmentos (teorema de Thales) y continúa con la definición y propiedades de la homotecia para finalmente plantear el concepto y propiedades de la semejanza como producto de una razón de homotecia.

Imagen 33. Ejemplo de construcción de múltiples paralelas



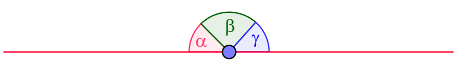
3.3. Problematización de la matemática escolar

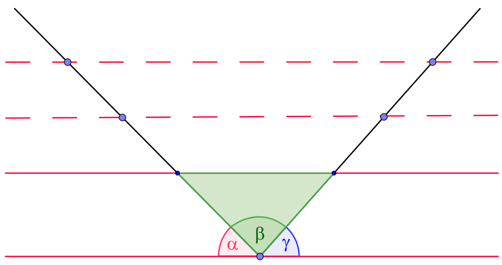
Se presentan las principales ideas fuerza que se sugieren movilizar en las aulas, de manera que el estudio del teorema de Thales sea consecuencia de emplear el sentido y la configuración espacial desarrollada en la construcción de triángulos y cuadriláteros, de manera evolutiva.

1. Conceptualización de la relación que enuncia el teorema (según las relaciones de medida angular o longitudinal).

- Dados tres ángulos cuyas medidas suman 180°, es posible construir uno o más triángulos que mantienen su forma, pero con distintas medidas de sus lados, es decir, triángulos semejantes entre sí (ver la disposición de los ángulos en la **imagen 34**).

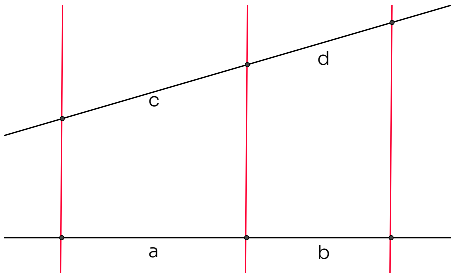
Imagen 34. Ejemplo de la construcción de triángulos semejantes dados tres ángulos que suman 180°





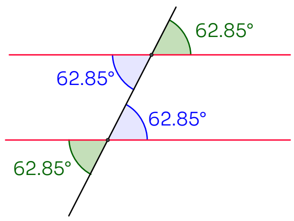
- Dadas dos rectas que son cortadas por dos o más rectas paralelas entre sí, los segmentos generados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta. Así, en la **imagen 35** se cumple que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Imagen 35. Líneas rectas cortadas por paralelas

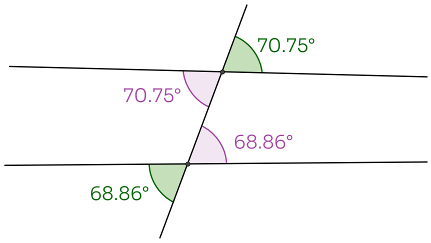


2. Recurrir al sentido y la configuración espacial para desarrollar la percepción de las formas y el espacio que ocupan: paralelismo, área, semejanza, etc.; por ejemplo, para establecer la propiedad siguiente: dos o más rectas cortadas por una transversal tendrán una **relación de paralelismo** si sus ángulos alternos internos o externos o correspondientes conservan la misma medida.

Imagen 36. Medidas angulares para verificar la relación de paralelismo



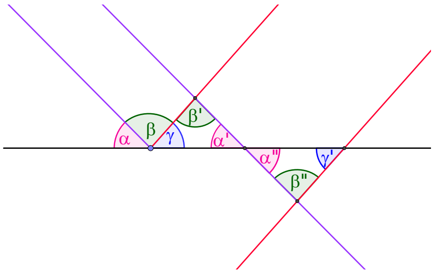
Se cumple la relación de paralelismo entre el par de rectas



No se cumple la relación de paralelismo entre las rectas

3. Vincular conocimientos de construcción de triángulos con el estudio del teorema de Thales para favorecer la articulación de saberes geométricos en los distintos grados o años de educación primaria y secundaria. El medio didáctico será el uso de rectas paralelas cortadas por rectas transversales como manera de verificar las relaciones de medida angulares y viceversa.

Imagen 37. Estrategia para construir un triángulo mediante rectas paralelas y transversales



4. Promover las habilidades de percepción, configuración y sentido espacial para el tránsito de la concepción aritmética del teorema de Thales a la visualización de las relaciones de medida longitudinales.

3.4. ¿Cómo operativizar las ideas fuerza?

Sobre la base del material *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007) y lo abordado en los apartados anteriores sobre la ubicación curricular y la contextualización disciplinar, proponemos una manera de operativizar las ideas fuerza presentadas en el apartado anterior sobre la problematización de la matemática escolar mediante una propuesta de objetivos específicos por año escolar.

1.º año

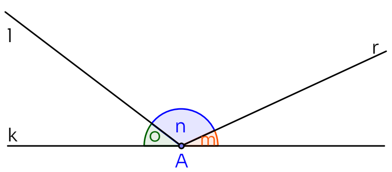
Objetivo: construcción de triángulos semejantes dados tres ángulos cuyas medidas suman 180° mediante las relaciones de medida entre rectas transversales y paralelas.

Para introducir el teorema de Thales se sugiere iniciar con el análisis de las relaciones de medida angulares entre rectas paralelas y transversales para la construcción de un triángulo que, se considera, a estas alturas escolares es un conocimiento previamente desarrollado en las aulas. Lo anterior tiene la finalidad de promover la necesidad de establecer una semejanza triangular y no únicamente de declararla.

Así, dados tres ángulos cualesquiera m, n y o, cuyas medidas suman 180°, se puede construir un triángulo cuyos ángulos internos se correspondan con las medidas m, n y o con ayuda del trazado de rectas paralelas y transversales. Dos ejemplos se presentan en las imágenes siguientes.

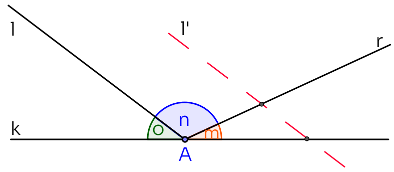
Imagen 38. Ejemplo de un proceso de construcción de un triángulo dados tres ángulos que suman 180°

1



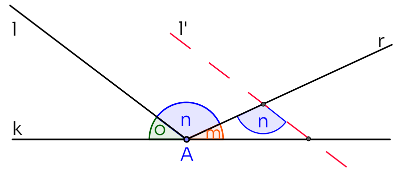
Dados tres ángulos cuyas medidas suman 180°, m, n y o sobre una recta k.

2



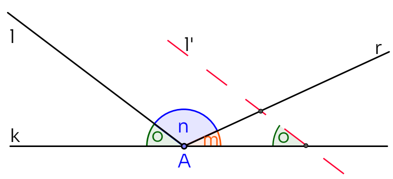
Se traza una recta paralela l' a la recta l de forma que se genera un triángulo, como se muestra en la imagen.

3



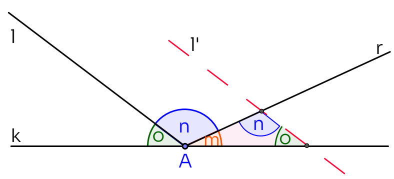
Por construcción, un ángulo interno del triángulo tendrá medida n, al ser alterno interno entre las paralelas l y l', y la recta transversal r.

4



Por construcción, un ángulo interno del triángulo tendrá medida o, al ser ángulo correspondiente entre las paralelas l y l', y la recta transversal k.

5

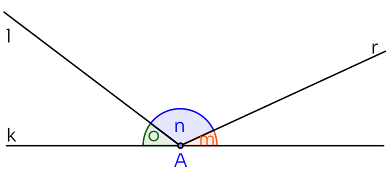


De esta manera, se valida la construcción de un triángulo con medidas de ángulos internos m, n y o.

Otra manera de desarrollar la misma construcción del triángulo, dados tres ángulos cuyas medidas suman 180°, es la siguiente.

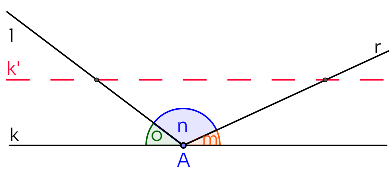
Imagen 39. Otro ejemplo de un proceso de construcción de un triángulo dados tres ángulos que suman 180°

1



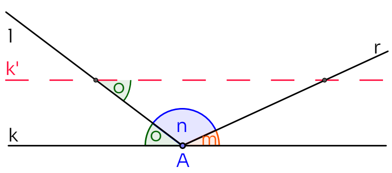
Dados tres ángulos que suman 180°, m, n y o sobre una recta k.

2



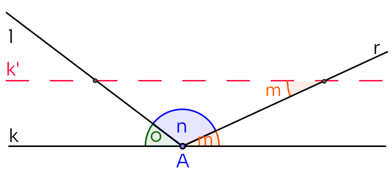
Se traza una recta paralela k' a la recta k de forma que se genera un triángulo, como se muestra en la imagen.

3



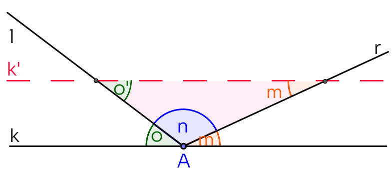
Por construcción, un ángulo interno del triángulo tendrá medida o, al ser alterno interno entre las paralelas k y k', y la recta transversal l.

4



Por construcción, un ángulo interno del triángulo tendrá medida m, al ser alterno interno entre las paralelas k y k', y la recta transversal r.

5

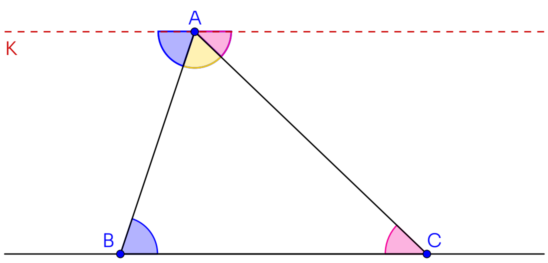


De esta manera, se valida la construcción de un triángulo con medidas de ángulos internos m, n y o.

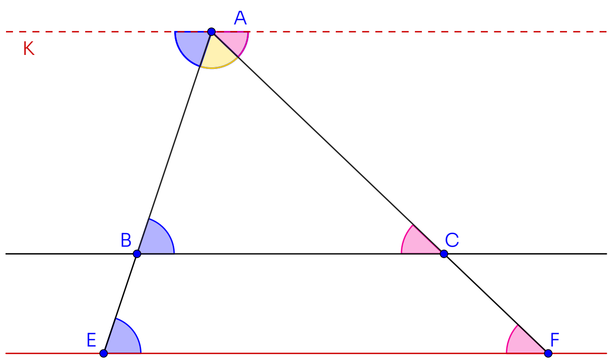
Movilizar ambas representaciones de dicha construcción favorece la percepción y visualización de las relaciones de medida angulares entre rectas paralelas y transversales, conocimiento importante para el reconocimiento de los esquemas triangulares, paralelismo y segmentos proporcionales que se trabajan en el teorema en cuestión.

Lo anterior es antesala para la articulación con el teorema de Thales, ya que es una estrategia para construir una variedad de triángulos semejantes entre sí, todos con la misma medida angular m, n y o. Por ejemplo, en la imagen siguiente, la recta k es paralela a la recta que pasa por BC, de manera que se construye el triángulo ABC con la estrategia previamente planteada.

Imagen 40. Construcción de triángulos semejantes a partir de la construcción de un triángulo dados tres ángulos que suman 180°



k || BC || EF y ∡ABC = ∡AEF y ∡ACB = ∡AFE



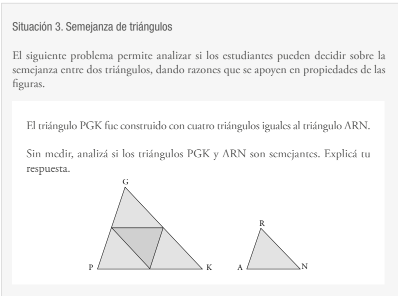
ΔABC~ΔAEF

Así, también se puede trazar una recta EF paralela a la recta k, de manera que se construye el triángulo AEF cuyas medidas de ángulos internos también coinciden en medidas con los correspondientes al triángulo ABC. Lo anterior permite argumentar la relación de semejanza entre los triángulos ABC y AEF. La relación de semejanza entre ambos triángulos garantiza la relación de proporcionalidad entre sus lados, de manera tal que:

$$\Delta ABC \sim \Delta AEF\text{, entonces: } \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$$

Este proceso puede reproducirse de manera que se generen una infinidad de triángulos semejantes entre sí y cuya relación proporcional entre sus lados se mantiene tal como expresa el teorema de Thales.

Un ejemplo de actividad que permite desarrollar esta estrategia se plantea en el material *Progresiones de los aprendizajes. Matemática. Educación Secundaria. Ciclo Básico* (GCABA, 2020), en el que se solicita trabajar la "Situación 3. Semejanza de triángulos" (ver la imagen siguiente). Para dar solución, el teorema de Thales permite, a partir de reconocer la relación angular que caracteriza la semejanza y congruencia entre triángulos, verificar la relación de paralelismo como argumento para validar la semejanza entre los triángulos PGK y ARN.


Situación 3. Semejanza de triángulos

El siguiente problema permite analizar si los estudiantes pueden decidir sobre la semejanza entre dos triángulos, dando razones que se apoyen en propiedades de las figuras.

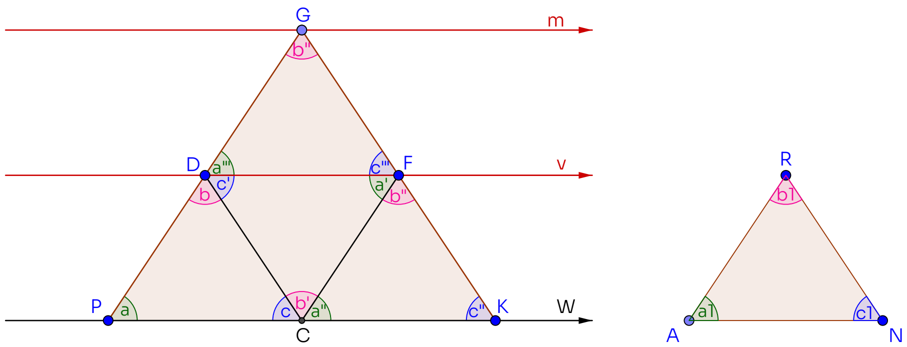
El triángulo PGK fue construido con cuatro triángulos iguales al triángulo ARN.

Sin medir, analizá si los triángulos PGK y ARN son semejantes. Explicá tu respuesta.

"Situación 3. Semejanza de triángulos" (GCABA, 2020, p. 164)
https://bit.ly/4bqi26q

Por construcción, los cuatro triángulos que forman el triángulo GPK son congruentes al triángulo ARN; por lo tanto, tal como se muestra en la **imagen 41**, se puede verificar la igualdad de medidas entre los pares de ángulos GDF y DPK, y GFD y FKP ($\measuredangle GDF = \measuredangle DPK$ y $GFD = \measuredangle FKP$). De esta manera, se cumple que los segmentos DF y PK son paralelos (DF || PK), de donde se obtiene que los triángulos GDF y GPK son semejantes ($\Delta GDF \sim \Delta GPK$). Así, como se sabe que el triángulo GDF es congruente con el triángulo ARN, se concluye que ambos mantienen una relación de semejanza ($\Delta ARN \sim \Delta GPK$).

Imagen 41. Relaciones angulares entre paralelas para dar solución a la "Situación 3. Semejanza de triángulos"



2.° año

Objetivo: argumentar el teorema de Thales desde distintos enfoques geométricos.

El teorema de Thales puede ser abordado desde distintos enfoques; sin embargo, destacamos dos principales para desarrollar en educación secundaria.

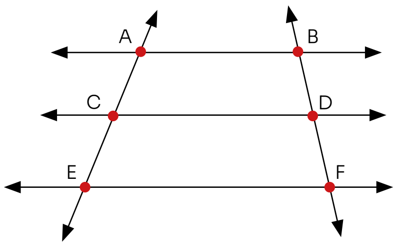
Enfoque centrado en la semejanza

El primer enfoque se refiere a la construcción de figuras semejantes y **las condiciones que hacen posible la semejanza entre triángulos**.

Se sabe que una forma de plantear el teorema de Thales desde este enfoque es la siguiente:

> Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados sobre la otra. (GCABA, 2007, p. 80)

Imagen 42. Representación del teorema de Thales

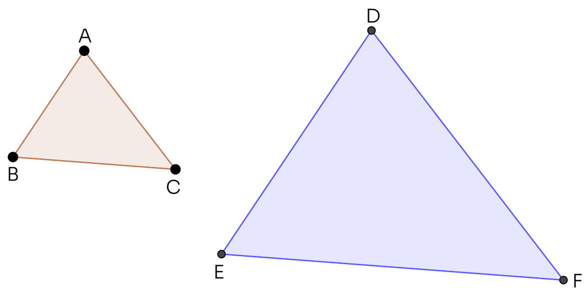


Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ entonces

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

Sin embargo, previamente y a modo de introducción al estudio de este teorema, se sugiere la construcción de dos triángulos semejantes ABC y DEF cualesquiera, y la verificación de la relación proporcional entre sus lados.

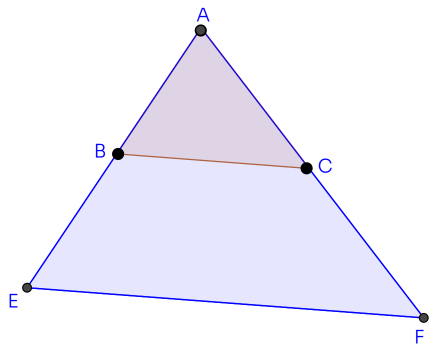
Imagen 43. Introducción al teorema de Thales mediante la relación longitudinal de los lados de triángulos semejantes



Siendo ABC y DEF semejantes, entonces: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

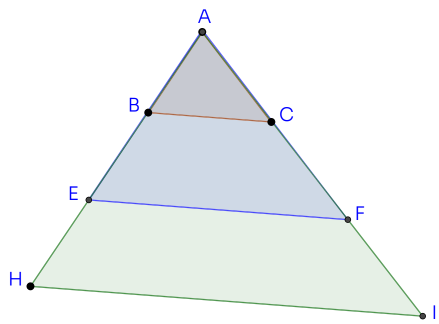
Posteriormente, y con la finalidad de articular con la estrategia de construcción de triángulos semejantes dados tres ángulos cuyas medidas suman 180° desarrollada en 1° año, se pueden configurar los triángulos ABC y AEF de la siguiente manera.

Imagen 44. Configuración espacial de dos triángulos semejantes que comparten un vértice en común



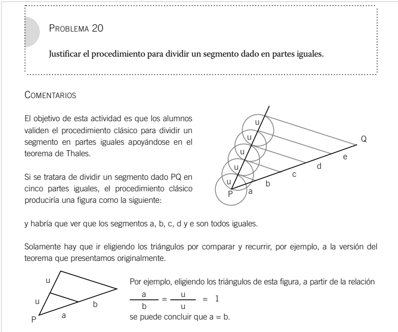
De lo anterior, se puede verificar que el lado BC es paralelo al lado EF (BC || EF), ya que, al ser ABC y AEF semejantes, se cumplirá que los ángulos ABC y AEF tienen la misma medida, al igual que los ángulos ACB y AFE ($\angle ABC = \angle AEF$ y $\angle ACB = \angle AFE$)) y, de esta forma, se puede concluir que son pares de ángulos correspondientes entre paralelas y transversales. Esta configuración puede replicarse con una diversidad de triángulos semejantes, como se muestra en la figura siguiente.

Imagen 45. Configuración espacial de tres triángulos semejantes que comparten un vértice en común



En el caso de la **imagen 45** anterior, dado que los triángulos ABC, AEF y AHI son semejantes, se puede verificar que los lados correspondientes BC, EF y HI son segmentos paralelos entre sí (BC || EF || HI) y que se cumple la relación entre las razones $\frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AI} = \frac{BC}{HI}$, tal como se declara en el teorema de Thales.

El problema 20 del documento *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007) puede propiciar un espacio para potenciar el desarrollo de esta estrategia (ver la imagen siguiente). Como puede analizarse en la sección de comentarios del problema, la intención didáctica radica en la articulación de la disposición de las figuras triangulares para presentar el procedimiento de seccionar un segmento en partes de igual medida con la visualización del teorema de Thales, como se representó en la **imagen 45**.


PROBLEMA 20

Justificar el procedimiento para dividir un segmento dado en partes iguales.

COMENTARIOS

El objetivo de esta actividad es que los alumnos validen el procedimiento clásico para dividir un segmento en partes iguales apoyándose en el teorema de Thales.

Si se tratara de dividir un segmento dado PQ en cinco partes iguales, el procedimiento clásico produciría una figura como la siguiente:

y habría que ver que los segmentos a, b, c, d y e son todos iguales.

Solamente hay que ir eligiendo los triángulos por comparar y recurrir, por ejemplo, a la versión del teorema que presentamos originalmente.

Por ejemplo, eligiendo los triángulos de esta figura, a partir de la relación

$$\frac{a}{b} = \frac{u}{u} = 1$$

se puede concluir que a = b.

"Problema 20". Ejemplo para argumentar el teorema de Thales (GCABA, 2007, p. 84)
https://bit.ly/4eKQ5c6

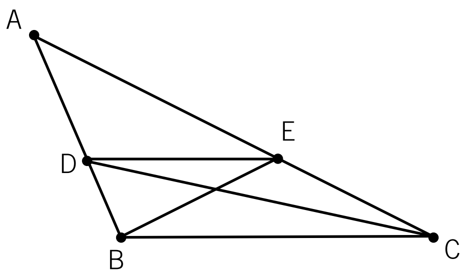
Esta articulación de imágenes plantea un reto en tanto visualización de las relaciones angulares y longitudinales, indispensables para conceptualizar el teorema de Thales de manera que se reconozca y se emplee en distintas situaciones.

Enfoque centrado en el área

El segundo enfoque para trabajar el teorema de Thales se trata de un **acercamiento a partir del área de triángulos**. En el material *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007, pp. 80-82), se propone una demostración del teorema que se basa en la fórmula del cálculo del área de un triángulo y que, en esencia, sigue el tratamiento que hizo Euclides en sus *Elementos* (siglo IV a. C.), y que se sugiere analizar con detenimiento.

Como parte de esa demostración, se emplea un conocimiento trabajado en la ficha didáctica para 2.º año *¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir?* (GCABA, s/f), propuesta para analizar en el capítulo de construcción de cuadriláteros, con el cual se asegura que los triángulos que tienen alturas de igual medida tienen áreas proporcionales a sus bases; esto es, a menor medida de base, menor medida de área y viceversa (ver **imagen 46**).

Imagen 46. Representación del teorema de Thales con trazos auxiliares BE y DC (GCABA, 2007, p. 80)

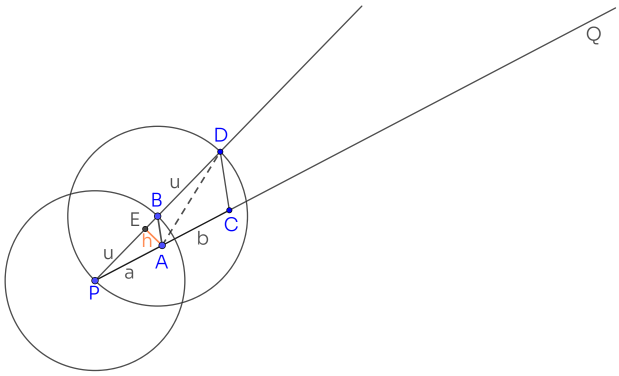


$$\frac{\text{Área ADE}}{\text{Área BDE}} = \frac{AD}{DB}$$

El trabajo con el problema 20 del documento *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007) es también propicio para analizar este teorema con el enfoque centrado en áreas, ya que el análisis se reduce a cuestionarse por qué, al dividir un segmento auxiliar en 5 partes que tienen la misma medida, se cumple que el segmento PQ también se divide en secciones a, b, c, d y e de igual medida.

Para dar respuesta a lo anterior, nos centraremos en la igualdad de las secciones a y b, ya que, posteriormente, se puede reproducir el proceso para concluir con las cinco secciones. En la **imagen 47**, se representa esta construcción, incluyendo el trazo auxiliar del segmento punteado AD y sabiendo por construcción que los segmentos AB y CD son paralelos entre sí.

Imagen 47. Proceso para seccionar un segmento a través de la comparación de áreas

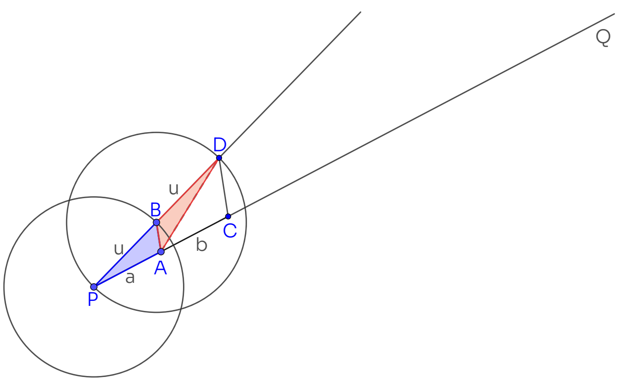


Comparando la relación de medida de base y altura entre los triángulos PAB y ABD, se verifica que las bases PB y BD de ambos triángulos miden *u* unidades, por construcción. También se cuenta con el segmento *h* (perpendicular desde A al segmento AD), que representa la altura de ambos triángulos. De lo anterior, se plantea la relación proporcional entre las áreas de estos triángulos y sus bases respectivas:

$$\frac{\text{Área PAB}}{\text{Área ABD}} = \frac{u}{u} = 1$$

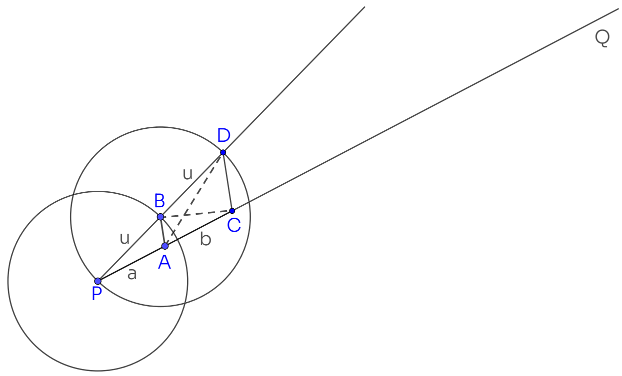
De donde se puede concluir que el área de los triángulos PAB y ABD es de igual medida.

Imagen 48. Comparación de las áreas de los triángulos PAB y ABD



Posteriormente, con ayuda del segmento BC como un nuevo trazo auxiliar, se verifica que los triángulos ABD y BAC tienen la misma medida de área, ya que comparten como base el segmento AB y conservan la misma medida de altura al estar construidos entre las paralelas BA y CD.

Imagen 49. Construcción del segmento BC para comparar los triángulos PAB y BAC

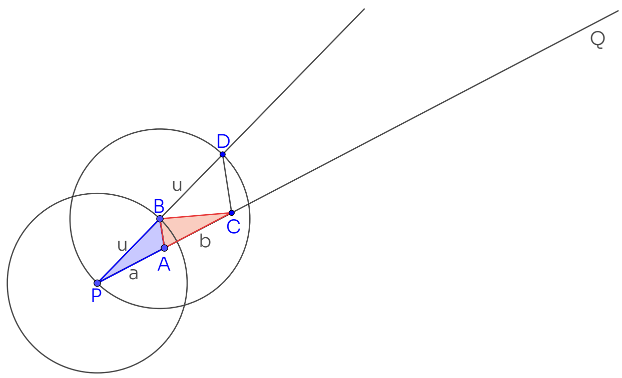


Por una relación de transitividad, la medida del área del triángulo PAB es igual a la del triángulo BAC. Y, estableciendo la relación proporcional entre medidas de áreas y medidas de las bases de ambos triángulos, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\text{Área PAB}}{\text{Área BAC}} = \frac{a}{b} = 1$$

Por lo tanto, el segmento a tiene igual medida que el segmento b.

Imagen 50. Comparación de las áreas de los triángulos PAB y BAC



De esta manera, se sugiere profundizar en el estudio de la relación de proporcionalidad entre las longitudes de segmentos de rectas construidas entre paralelas (teorema de Thales) mediante la comparación de áreas de triángulos que, aunque se ubiquen en distintas configuraciones espaciales, coinciden en sus medidas de base y altura. Dicho enfoque sostiene una argumentación geométrica del teorema de Thales más allá de los saberes aritméticos asociados a la razón o semejanza.

Unidad de análisis	Secundaria	
Nivel	**1.°**	**2.°**
Objetivo del año escolar	Construcción de triángulos semejantes dados tres ángulos cuyas medidas suman 180° mediante las relaciones de medida entre rectas transversales y paralelas.	Argumentar el teorema de Thales desde distintos enfoques geométricos.
Ideas fuerza	• Conceptualización de la relación que enuncia el teorema de Thales mediante la construcción de triángulos semejantes. • Vincular conocimientos de la construcción de triángulos con el estudio del teorema de Thales mediante la construcción de ángulos entre paralelas y transversales.	• Conceptualización de la relación que enuncia el teorema de Thales mediante la construcción de segmentos proporcionales entre dos rectas oblicuas y paralelas. • Recurrir al sentido y configuración espacial para desarrollar la percepción de las formas y el espacio que ocupan: relación de paralelismo. • Visualización del teorema como relación de medidas y no solo desde su concepción aritmética o de semejanza.
Preguntas clave	¿Cómo se relaciona la construcción de triángulos dados tres ángulos suplementarios con el teorema de Thales?	¿Cómo se relaciona la proporcionalidad de medidas de áreas de triángulos con la misma medida de altura, la semejanza de triángulos y el teorema de Thales?
Materiales propuestos	• “Situación 3”. *Progresiones de los aprendizajes. Matemática. Educación Secundaria. Ciclo Básico* (GCABA, 2020), p. 164. • “Problema 20”. *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007), p. 84.	• “Problema 20”. *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007), p. 84. • *¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir?* Ficha didáctica 2.º de secundaria (GCABA, s/f).

Bibliografía

Documentos de diseño curricular

GCABA (2001). *Actualización Curricular. 7.º grado. Documento de Trabajo*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

GCABA (2007). *Matemática. Geometría* (coord. Cappelletti, G.) (1.ª ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Dirección General de Planeamiento Educativo del Ministerio de Educación.

GCABA (2012). *Diseño Curricular para la Escuela Primaria: Segundo ciclo de la Escuela Primaria: Educación General Básica (Tomo 2)*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Dirección de Currícula.

GCABA (2014). *Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* (1.ª ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2015). *Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2.ª ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2019a). *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa.

GCABA (2020). *Progresiones de los aprendizajes: Matemática: Educación Secundaria: Ciclo Básico*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa.

GCABA (2021a). *Estudiar y aprender: 1° año* (1.ª ed. para el alumno). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento Educativo.

GCABA (2021b). *Estudiar y aprender: 2° año* (1.ª ed. para el alumno). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento Educativo.

GCABA (2023). *Matemática. Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria. Recomendaciones para la implementación de los materiales de trabajo para séptimo grado y primer año* (1.ª ed. para el profesor). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2024a). *Estudiar y aprender en Cuarto: Matemática, Prácticas del Lenguaje, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales* (2.ª ed. para el alumno). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2024b). *Estudiar y aprender en Quinto: Matemática, Prácticas del Lenguaje, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales* (2.ª ed. para el alumno). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2024c). *Estudiar y aprender en Sexto: Matemática, Prácticas del Lenguaje, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales* (2.ª ed. para el alumno). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2024d). *Estudiar y aprender en Séptimo: Matemática, Prácticas del Lenguaje, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales* (2.ª ed. para el alumno). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

Capítulo 1. Números racionales

Almeida, R., Bruno Castañenda, A. y Perdomo Díaz, J. (2014). "Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas". *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 9-34.

Bautista, V. y Rodríguez, F. (2012). "Argumentos históricos y la enseñanza de las fracciones". *Memoria de la XV escuela de invierno en matemática educativa*, pp. 138-143.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). "Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers". *Teaching and teacher education*, 47, 82-92

Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). "Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria". *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(1), 17-35.

Filep, L. (2001). "The development, and the developing of the concept of a fraction". *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-7.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. y Content, A. (2013). "A componential view of children's difficulties in learning fractions". *Frontiers in Psychology*, 4(715), 1-12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715

Gómez Mulett, A. y Pérez Schmalbach, A. (2016). "Tres enfoques para la enseñanza de los números racionales". *Saber*, 28(4), 819-827.

Hariyani, M., Herman, T., Suryadi, D. y Prabawanto, S. (2022). "Exploration of Student Learning Obstacles in Solving Fraction Problems in Elementary School". *International Journal of Educational Methodology*, 8(3), 505-515.

Herreros-Torres, D., Sanz, M. T. y Gómez-Ferragud, C. B. (2022). "Dificultades con la Fracción como Operador en Discentes de Sexto Curso de Educación Primaria". *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36, 728-752.

Isoda, M. y Olfos, R. (2021). "Introduction of Multiplication and Its Extension: How Does Japanese Introduce and Extend?". En Isoda, M. y Olfos, R. (eds.). *Teaching Multiplication with Lesson Study*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6_4.

Klein, R. y Tirosh, D. (1997). "Teachers' pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers". En Pekhonen, H. (ed.), *Proceedings of the 21st PME Conference*, 3, 144-152.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. y Siegler, R. S. (2015). "Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?". *Developmental Review*, 38, 201-221.

Maza Gómez, C. (1999). "Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de fracciones". *Suma, 31*, 87-95.

Moreno, A. y Flores, P. (2000). "Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento desde los números racionales". Saem Thales.

Park, J., Güçler, B. y McCrory, R. (2013). "Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives". *Educational Studies in Mathematics*, 82, 455-479. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9440-8.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2015). "Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales". *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29, 143-166.

Siegler, R. S. y Pyke, A. A. (2013). “Developmental and individual differences in understanding of fractions”. *Developmental psychology*, 49(10), 1994-2004.

Yáñez, J. C., Rojas, N. y Martínez, P. F. (2013). “Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales”. *Avances de investigación en Educación Matemática*, (4), 47-64.

Wiest, L., y Amankonah, F. O. (2019). “Conceptual versus Procedural Approaches to Ordering Fractions”. *European Journal of Science and Mathematics Education, 7*(1), 61-72.

Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2016). “Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones”. *Zetetiké. Revista de Educação Matemática*, 24(3), 301-321.

Capítulo 2. Construcción de cuadriláteros

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica*. Universidad Autónoma de Yucatán.

De Villiers, M. (1994). “El papel y la función de una clasificación jerárquica de cuadriláteros”. *Para el aprendizaje de las matemáticas*, *14*(1), 11-18.

De Villiers, M. (2021). “Some more properties of the bisect-diagonal quadrilateral”. *The Mathematical Gazette*, *105*(564), 474-480.

Empoderamiento Docente (2022). *Pensamiento Geométrico - 7º grado*. Trayecto Matemática Educativa del Programa Gen Técnico. Grupo Techint y Empoderamiento docente.

Flores, P., Ramírez, R., y Del Río, A. (2015). “Sentido espacial”. En Flores, P. y Rico, L. (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Ediciones Pirámide.

Fujita, T., y Jones, K. (2007). “Learners’ understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing”. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20. https://doi.org/10.1080/14794800008520167

GCABA (2018a). *Matemática. Construcciones de cuadriláteros con GeoGebra. Actividades para los estudiantes. Segundo año*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación e Innovación, Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2018b). *Matemática. Construcciones de cuadriláteros con GeoGebra. Segundo año* (1.ª edición para el profesor). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación e Innovación, Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2019b). *Diseñar para realizar: Las construcciones geométricas. Actividades para estudiantes. Primer año*. Serie Educación Técnica. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación e Innovación, Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2024e). *Matemática en Red. Guía docente. Tomo I. Nivel Primario (6.° y 7.°) y Nivel Secundario (Ciclo Básico)*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Dirección General Escuela de Maestros.

GCABA (s/f). *¿En qué casos es posible comparar áreas sin medir?* Ficha didáctica para nivel secundario. Formación General. 2.º año. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

Jones, K. (2000). “Providing a foundation for deductive reasoning: Students’ interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations”. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55-85.

Prieto, J. L. y Arredondo, E. (2021). “Construcciones euclidianas con GeoGebra y procesos de objetivación: Un estudio con futuros profesores de matemáticas”. *REMATEC, 16*(39), 77-100.

Serrano, Á., Ramírez, R. y Flores, P. (2018). “El sentido espacial sobre traslaciones en un libro de texto”. *Números*, *98*, 117-131.

Capítulo 3. Teorema de Thales

Brousseau, G. (1995). “Promenade avec Thalès entre la maternelle et l’université”. *Commission Inter-Irem Premier cycle, Autour de Thalès*, 87-124.

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). “Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor”. *Educación Matemática, 33*(1), 98-124.

Duperret, J. C. (1995). “Pour un Thales dinamyque”. *Repères-IREM*, 20, 75-90.

Escudero, I. (2005). “Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX”. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(3), 379-392.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Campinas, UNICAMP.

Filloy, E. y Lema, S. (1996). “El teorema de Tales: significado y sentido en un sistema matemático de signos”. En Hitt, F. (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 55-75). Grupo Editorial Iberoamérica.

GCABA (2024f). *Matemática en Red. Guía docente. Proporcionalidad directa. Nivel Primario (6° y 7°) y Nivel Secundario (Ciclo Básico)*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Dirección General Escuela de Maestros.

Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*. [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Valencia.

Laguerre, E. (2005). *Une ingenierie didactique pour l’apprentissage du theoreme de Thales au college*. [Tesis doctoral no publicada]. Université Paris-Diderot - Paris VII. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00337891/document

Lemonidis, C. (1992). “Différentes présentations mathématiques et comportement des élèves face au théoréme de Thalès”. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 12, 107-125.

Michonneau, J. y Pfaff, N. (1990). “La proportionnalite en geometrie: le theoreme de Thales”. *Petit X*, 23, 41-59.

Buenos Aires Ciudad