escuela de maestros

2024

Matemática en Red

Tomo I

Guía docente

Múltiplos y divisores
Producción de fórmulas
Función lineal
Construcción de triángulos

Nivel Primario (6.° y 7.°) y Nivel Secundario (Ciclo Básico)

Buenos Aires Ciudad

Buenos Aires Ciudad

Jefe de Gobierno
Jorge Macri

Ministra de Educación
Mercedes Miguel

Jefa de Gabinete
Julia Raquel Domeniconi

Subsecretario de Planeamiento e Innovación Educativa
Oscar Mauricio Ghillione

Subsecretaria de Gestión del Aprendizaje
María Lucía Feced Abal

Subsecretario de Gestión Económico Financiera
y Administración de Recursos
Ignacio José Curti

Subsecretario de Tecnología Educativa
Ignacio Manuel Sanguinetti

Directora General de Educación de Gestión Privada
María Constanza Ortiz

Directora de la Unidad de Evaluación Integral
de la Calidad y Equidad Educativa
Samanta Bonelli

escuela de maestros

Directora General
Viviana Edith Dalla Zorza

Colección Matemática en Red Tomo I

Desarrollo de contenido: Empoderamiento Docente. Coordinación: Daniela Reyes Gasperini.

Revisión académica: Karla Gómez Osalde y Daniela Reyes.

Autoría por capítulo: Capítulo 1. Karla Gómez Osalde; coautoría: Elena Martínez Díaz.

Capítulo 2. Luis López Acosta. Capítulo 3. Wendolyne Ríos Jarquín. Capítulo 4. Karla Gómez Osalde.

Revisión de documentos curriculares: Paulina Salazar Cortez.

Equipo de Comunicación de la Dirección General Escuela de Maestros (DGESM)

Coordinación general: María de la Paz Amieva; Juan Martín Fernández Quintero.

Coordinación editorial pedagógica: María Cecilia Guerra Lage.

Equipo Editorial de Materiales y Contenidos Digitales

Coordinación general: Silvia Saucedo.
Coordinación editorial: Marcos Alfonzo.
Asistencia editorial: Leticia Lobato.
Edición: Andrés Albornoz.
Diagramación: Patricia Peralta.
Ilustraciones: Susana Accorsi.

Carlos H. Perette 750, 4° piso - Barrio 31 - Retiro - C1063
Ciudad Autónoma de Buenos Aires

En la elaboración de este documento se ha intentado que el lenguaje no refuerce sesgos sexo-genéricos o que promueva discriminación, desigualdad o invisibilización de personas o grupos.

Fecha de consulta de imágenes, videos, textos y otros recursos digitales disponibles en internet:
10 de enero de 2024.

ISBN 978-987-818-104-2

Publicación de distribución gratuita.
Prohibida su venta.

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Matemática en red : guía para docentes : tomo 1 / 1a edición para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2024.
120 p. ; 30 x 21 cm.

ISBN 978-987-818-104-2

1. Educación Primaria. 2. Educación Secundaria. 3. Matemática. I. Título.
CDD 371.32

Presentación

El programa **Matemática en Red** emerge como un espacio de colaboración y reflexión conjunta entre los y las docentes de nivel primario y secundario de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Su propósito fundamental es explorar contenidos matemáticos específicos y estrategias pedagógicas, promoviendo la articulación de la enseñanza en los momentos de pasaje de nivel.

La creación de este programa viene a dar respuesta a la conocida necesidad de mejorar los niveles de aprendizaje matemático, estableciendo como línea prioritaria el desarrollo del pensamiento matemático de las y los estudiantes, y haciendo foco en acciones que promuevan el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de manera integral.

Participarán en el programa maestras y maestros de 6.° y 7.° grado de primaria, junto con docentes de 1.° y 2.° año de secundaria que se desempeñan en escuelas de la Ciudad. La implementación del programa incluirá talleres conjuntos y otros específicos para docentes de ambos niveles, con encuentros a lo largo del año escolar. El enfoque buscará potenciar prácticas educativas que generen un aprendizaje matemático significativo y sostenible.

La metodología de trabajo se centra en la problematización del contenido matemático escolar y en cómo abordar su tratamiento en las aulas. El programa apunta a la articulación entre niveles, explorando estrategias pedagógicas que enriquezcan la práctica docente. Como parte del programa, se han desarrollado materiales específicos estructurados en capítulos, abordando contenidos matemáticos curriculares desde una perspectiva integral, que estarán disponibles en línea. Para la elaboración de estos materiales se ha partido del planteo de interrogantes cruciales como: ¿qué contenidos matemáticos han abordado los y las estudiantes en niveles educativos previos y cuáles enfrentarán en los siguientes? ¿Qué estrategias pedagógicas se potencian, introducen o consolidan durante estos niveles? Por ello, los materiales tendrán como destinatarios a docentes de los niveles primario y secundario de manera simultánea.

A corto plazo, se espera que el diálogo entre docentes de ambos niveles impulse la reflexión y se traduzca en acciones estratégicas en el aula. A largo plazo, se busca establecer una comunicación fluida entre niveles que promueva una transición educativa sin quiebres, donde las y los estudiantes experimenten un proceso de articulación coherente y consistente.

El programa aspira a fomentar la comunicación efectiva entre docentes de distintos niveles, reconociendo que esta colaboración enriquece la experiencia educativa. Al entender la matemática y su didáctica como elementos de conexión, no solo entre contenidos sino también entre niveles, se intenta contribuir a una educación matemática que continúa en la búsqueda de la coherencia y efectividad para las y los estudiantes, trascendiendo las divisiones artificiales que a veces limitan el enfoque educativo.

El título **Matemática en Red** expresa la intención de construir una red sólida de aprendizajes que conecte los niveles educativos. El programa busca crear un entorno donde la colaboración entre docentes de los niveles primario y secundario no solo sea un objetivo, sino una realidad palpable. Al tejer esta red de conocimiento, aspiramos a fortalecer la coherencia y continuidad de la educación matemática, brindando a las y los estudiantes una experiencia educativa integrada y enriquecedora a lo largo de su trayectoria escolar. **Matemática en Red** es parte de la política educativa prioritaria de mejora de aprendizajes que se propone el Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Representa un compromiso con la construcción de una comunidad de aprendizaje constante, colaborativa y continua.

Introducción

La Real Academia Española define la articulación como *la unión entre dos piezas rígidas que permite el movimiento relativo entre ellas*. Esta definición colocaría a la educación primaria y a la educación secundaria como piezas rígidas, lo cual podemos no compartir. Lo que sí compartimos es que se puede (y seguramente se necesite) permitir un movimiento relativo entre ellas. Dicho movimiento es el que nos convoca en este documento.

La transición entre la educación primaria y la educación secundaria, habitualmente, es un proceso que vivencian las y los estudiantes, no así el equipo docente (maestras, maestros, profesores y profesoras) o el equipo directivo, y tampoco los libros de texto. Existe una articulación declarada a nivel curricular, existen materiales que evidencian las progresiones entre uno y otro nivel educativo, y existen contenidos propiamente dichos que viven y se construyen en ambos niveles. Ahora bien, ¿cómo dialogan estos espacios para contribuir a la transición que viven las y los estudiantes?, ¿cuáles son los quehaceres propios del desarrollo del pensamiento matemático que pretendemos potenciar en cada uno de los años escolares?, ¿qué contenidos matemáticos se trabajan en años anteriores o posteriores al año escolar en el que me encuentro? Son preguntas que acompañan desde hace años el quehacer docente, tanto de primaria como de secundaria.

Desde el equipo académico de la Escuela de Maestros de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires nos proponemos continuar la reflexión sobre estos interrogantes a través de los cuadernos de la colección **Matemática en Red**. El presente ejemplar desarrolla las temáticas de *Múltiplos y divisores*, *Producción de fórmulas, Función lineal* y *Construcción de triángulos,* y constituye la continuación de un bloque de contenidos cuyo primer punto estuvo centrado en el tratamiento de la proporcionalidad directa.

Cada uno de los contenidos matemáticos mencionados cuenta con cuatro apartados.

- Ubicación curricular. El objetivo es evidenciar cuándo y describir cómo se aborda el tópico matemático que se estudia de 6.° grado de primaria a 2.° año de secundaria, considerando como fuentes bibliográficas los materiales oficiales del Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

- Contextualización disciplinar. El objetivo es abordar una reflexión teórico-práctica sobre cuáles son los elementos clave que se recomienda plantear desde el desarrollo profesional docente para propiciar el aprendizaje del contenido específico y la resignificación por parte de las y los estudiantes.

- Problematización de la matemática escolar. El objetivo es exponer las ideas fuerza que pretendemos movilizar en esta propuesta para el aprendizaje del contenido matemático específico, haciendo hincapié en lo que es propio de cada año.

- ¿Cómo operativizar las ideas fuerza? El objetivo es mostrar el análisis didáctico que fundamenta la propuesta de dónde profundizar, matemáticamente hablando, en cada año escolar (desde 6.° grado de primaria hasta 2.° año de secundaria).

No obstante, invitamos a las y los lectores a acceder también a los textos referenciados, editados en años anteriores, ya que serán indispensables para una articulación fluida.

Índice

Capítulo 1. Múltiplos y divisores

1.1. Ubicación curricular

El objetivo de este apartado es visibilizar dónde y cómo se presentan los objetivos y alcances curriculares relativos al contenido específico de **múltiplos y divisores**. Para la revisión se considerarán documentos publicados por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (GCABA).

Tabla 1. Síntesis de ubicación curricular del contenido de múltiplos y divisores

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivos curriculares	*Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* (2014) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)		*Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2ª ed., 2015) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)	
	Tema: Números naturales y operaciones • Resolver situaciones que involucren la descomposición multiplicativa de un número, el uso de múltiplos y divisores, de múltiplos y divisores comunes entre varios números, de números primos y compuestos. • Participar en la elaboración de argumentos que involucren relaciones internas de la multiplicación y la división. • Analizar la equivalencia entre diferentes escrituras multiplicativas y referidas a la división entera; analizar las diferentes informaciones que permiten relevar.[1] (p. 125)	**Tema: Números naturales y operaciones** • Reconocer y utilizar la relación $D = d \times c + r$, con $r < d$. • Resolver problemas que requieran la descomposición multiplicativa de un número, el uso de múltiplos y divisores, de múltiplos y divisores comunes entre varios números y de números primos y compuestos. • Analizar y utilizar los criterios de divisibilidad para establecer relaciones entre números, entre cálculos y establecer cocientes y restos[2]. • Participar de la elaboración de argumentos que fundamenten la validez de los criterios utilizados. (p. 126)	• Utilizar las propiedades de los números naturales y sus operaciones para leer y producir fórmulas que modelicen situaciones, transformar expresiones en otras equivalentes y obtener nueva información y producir argumentos que den cuenta de la validez de lo realizado. (p. 514)	• Utilizar recursos algebraicos que permitan producir, formular y validar conjeturas referidas a la divisibilidad en el campo de los números enteros. (p. 521)

1 Este objetivo curricular declarado para 6.° no se desarrolla como tal en las actividades de *Estudiar y aprender en Sexto*, pero sí se atiende en el material *Matemática. Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Séptimo grado.*

2 Este objetivo curricular declarado para 7.°, no se atiende como tal en las actividades de *Estudiar y aprender en Séptimo*, pero sí se atiende en *Estudiar y aprender en Sexto*.

<table>
<tr><th>Unidad de análisis</th><th colspan="2">Primaria</th><th colspan="2">Secundaria</th></tr>
<tr><td>Alcances planteados desde la propuesta actual</td><td>• Resolver problemas que impliquen el uso de múltiplos y divisores de números naturales y de múltiplos y divisores comunes.
• Desarrollar la descomposición multiplicativa de un número.</td><td>• Resolver problemas que involucren la descomposición multiplicativa de un número.
• Formular y validar conjeturas relativas a las nociones de múltiplo y divisor.
• Analizar información que porta una expresión aritmética para decidir si un número es múltiplo o divisor de otro.</td><td>• Proponer el estudio de relaciones entre cantidades asociadas a la divisibilidad, por ejemplo, la suma de dos múltiplos, si un número es múltiplo de otro y este de un tercero, el primero es múltiplo del tercero, etc.</td><td>• Recuperar las conceptualizaciones alcanzadas con relación a múltiplos y divisores con números naturales abordadas en la escuela primaria, pudiendo extender a los enteros las características más trascendentes.
• Introducir el álgebra como herramienta para conocer propiedades de las operaciones.</td></tr>
<tr><td>Progresiones Ideas principales</td><td colspan="2">• Noción de múltiplo y divisor como estrategia de cálculo.
• Descomposición multiplicativa en factores.
• Propiedades de la multiplicación y la división (en contexto extra- e intramatemático).
• Criterios de divisibilidad.</td><td colspan="2">• Propiedad: si b es múltiplo de a, entonces todo múltiplo de b también es múltiplo de a.
• Múltiplos, divisores y restos de sus resultados, realizando o no transformaciones de la expresión.
• Relación entre múltiplo y divisor.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Estudiar y aprender PUENTE</td><td colspan="4">1. Problemas para resolver con varios cálculos
A través de problemas que requieren de varios procedimientos para ser resueltos, se pretende habilitar un trabajo con los cálculos que permita comenzar a problematizar el abordaje de la jerarquización de las operaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Propiedades de la multiplicación
Se proponen actividades hacia la generalización de las relaciones multiplicativas para el trabajo con las propiedades de los números naturales y de las operaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Propiedades de la división
Contrario al estudio de la resolución de la cuenta de dividir en sí, se requiere usarla como punto de apoyo para el análisis de las relaciones entre los números que aparecen en cada operación.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Problemas con múltiplos y divisores
Se presentan diferentes problemas para el estudio de múltiplos y divisores que requieren operarlos, identificarlos y reconocer la relación entre ellos.</td></tr>
</table>

1.2. Contextualización disciplinar

El pensamiento aritmético se encarga de estudiar las relaciones entre cantidades y patrones numéricos mediante la identificación de las características de los números. Esto es de utilidad para entender y explicar la forma en que se presentan diversas situaciones de la vida cotidiana. Así, el estudio de las propiedades numéricas como generalización de las relaciones entre los números se reconoce como conocimiento primordial, no solo dentro de la matemática, sino también cultural y socialmente hablando.

Un ejemplo de lo anterior se reconoce en el concepto aritmético de *divisibilidad*. Desde la teoría de números, la divisibilidad se define en la estructura de los números enteros positivos y expresa la generalización de una relación de orden parcial. Esto significa que la divisibilidad es un tipo de relación entre dos números enteros positivos, por ejemplo, el 2 con respecto al 10, y comúnmente se dice que "el 10 es divisible por 2".

Incorporar este punto de vista relacional promueve oportunidades para la comprensión profunda de las estructuras matemáticas y del sentido de las operaciones por parte de las y los estudiantes. Un ejemplo de ello se puede encontrar en los libros especializados en la matemática, pues presentan distintas formas de significar la relación numérica característica del concepto de *divisibilidad*.

El libro de Apostol (1980) declara: "Diremos que d divide a n y escribiremos d/n si $n = cd$ para un c. Diremos también que n es múltiplo de d, que d es un divisor de n, o que d es un factor de n". La **divisibilidad** entonces establece una **relación binaria** entre enteros con una serie de propiedades elementales.

Y el diccionario de matemáticas de Warusfel (1972) plantea a la **divisibilidad** como una **relación de orden parcial** entre los números naturales: "La relación de divisibilidad que se expresa de la forma a/b (a divide a b), se define en el conjunto N de los números naturales, y con frecuencia en Z, anillo de los números enteros. Por definición $a|b$ si existe un número entero c tal que $b = a \times c$, a es un divisor de b, el cual es múltiplo de a".

Desde el punto de vista didáctico, el estudio de la divisibilidad requiere transitar por rupturas y dualidades, en tanto que se trabaja con posterioridad al aprendizaje de las operaciones aritméticas de división y multiplicación, sus términos y algoritmos:

- Dualidades, porque se requiere desarrollar la naturaleza operativa de la división y la multiplicación, pero también la naturaleza relacional de la divisibilidad. Por ejemplo, es distinto preguntar *¿cuál es el resultado de la operación 15 entre 3?*, cuya respuesta es 5, que preguntar *¿3 es divisor de 15?,* o su equivalente *¿15 es divisible por 3?*, cuya respuesta no corresponde a un número dado, sino que requiere expresar una forma de relacionar los números 3 y 15, en este caso, por medio de la divisibilidad. Otro ejemplo que puede ayudar para reflexionar sobre esta idea consiste en reconocer que el 2 puede dividir al 15, pero no hay una relación de divisibilidad entre estos números, pues no existe un número en el campo de los enteros que, al multiplicarlo por 2, dé como resultado 15.
- Rupturas de significados en los términos *divisor* y *factor*, ya que son empleados tanto en las operaciones aritméticas de la división y la multiplicación como en la divisibilidad. Esto último genera una dificultad en las aulas, puesto que el significado que tienen los términos *divisor* y *factor* al trabajar con las operaciones de división y multiplicación es distinto al significado desde la divisibilidad: mientras que en las operaciones aritméticas sirven para nombrar los elementos que intervienen en el algoritmo, en la divisibilidad, *factor* y *divisor* son usados para determinar una relación entre dos números. En este

sentido, el 2 puede dividir al 15, pero no es divisor de 15, puesto que no existe un número entero tal que, al multiplicarlo por 2, dé como resultado 15. En este caso, operativamente hablando, el 2 representa el divisor en el algoritmo de la división; sin embargo, en términos relacionales, el 2 y el 15 no mantienen una relación de divisibilidad.

Así, para el estudio de los múltiplos y divisores se considera necesario promover espacios que movilicen la relación múltiplo-divisor, así como multiplicación-división y, en términos amplios, la divisibilidad-multiplicidad entre dos números o cantidades.

Escolarmente, la presencia de los múltiplos y divisores en el tránsito entre el nivel primario y el secundario, específicamente en el conjunto de los números enteros positivos, se caracteriza por:

a. En la educación a nivel primario, el estudio de la divisibilidad se presenta como una herramienta aritmética para argumentar la validez de procedimientos y resultados, así como para el desarrollo de estrategias que apoyen a los cálculos multiplicativos, la descomposición multiplicativa en dos o más factores, y la anticipación de resultados de cálculos nuevos con apoyo de los conocidos sin necesidad de efectuar las operaciones.

b. Posteriormente, en la secundaria, se promueve la resolución del cálculo acompañado de la lectura de la información que porta, la transformación de expresiones equivalentes que permita leer nueva información y la decisión acerca de la divisibilidad o no de un número por otro.

Por todo lo reflexionado hasta el momento, se plantea la conveniencia de enfatizar el estudio de los múltiplos y divisores en primaria y secundaria en el desarrollo de la divisibilidad como relación numérica, específicamente en el conjunto de los enteros positivos, más allá del cálculo operativo de la división. Por ende, el contenido de múltiplos y divisores estará fuertemente ligado también a su análisis como cualidad, esto es, al estudio de la divisibilidad y, por consecuencia, de la multiplicidad.

1.2.1. Conceptos base asociados

a. Multiplicación, división, multiplicidad y divisibilidad

Una de las primeras ideas que se recomienda trabajar es la distinción entre la multiplicación y la división como operaciones en el campo multiplicativo y la multiplicidad-divisibilidad como relación matemática entre cantidades. En aritmética se reconocen como operaciones matemáticas básicas la suma, la resta, la multiplicación y la división, esto es, operaciones en el campo aditivo (adición, sustracción) y operaciones en el campo multiplicativo (multiplicación, división). Mientras que la operación matemática responde a una abstracción de un proceso en el que el número es separado del contexto empírico y se generaliza mediante una simbolización específica, la divisibilidad-multiplicidad nos comunica que dos números están relacionados de manera que uno cabe una cantidad exacta de veces en otro, o bien que uno se obtuvo al duplicar o triplicar el otro.

Tabla 2. Diferencia entre multiplicación, múltiplo y multiplicidad

Multiplicación	**Múltiplo**	**Multiplicidad**
$7 \times 3 = 21$	21 es múltiplo de 7, pues se obtuvo al triplicar el número 7	21 y 7 tienen una relación de multiplicidad

Tabla 3. Distinción entre división, divisible y divisibilidad

División	**Divisible**	**Divisibilidad**
21 ÷ 7 = 3	21 es divisible por 7, pues cabe exactamente 3 veces en el 21	21 y 7 tienen una relación de divisibilidad

b. Formas de leer la relación de divisibilidad

La estructura de la relación de divisibilidad se establece en el campo de los números naturales o bien enteros positivos de la manera siguiente: $a = b \times c$, en donde a y b son números que mantienen una relación de divisibilidad, pues existe un número c tal que se cumpla esta relación de equivalencia (con a, b y c en los enteros positivos). Por ejemplo, 21 y 7 mantienen una relación de divisibilidad, pues el número 3 permite la relación de equivalencia siguiente: **21** = 3 × 7.

Así, la relación de divisibilidad responde a una estructura multiplicativa, que conviene que las y los estudiantes puedan leer en dos direcciones.

Imagen 1. Dos formas de leer la divisibilidad

Por un lado, enfatizando la relación de multiplicidad:

21 es múltiplo de 7 y 7 es factor de 21

Por otro lado, destacando la relación de divisibilidad:

21 es divisible por 7 y 7 es divisor de 21

Asimismo, y como parte de la lectura de la estructura multiplicativa de la divisibilidad, se busca promover los vínculos entre factor y divisor, y entre múltiplo y divisible. En el ejemplo se hace explícito entonces que:

Tabla 4. Relaciones factor-divisor y múltiplo-divisible

Relación factor-divisor	**Relación múltiplo-divisible**
7 es factor de 21 7 es divisor de 21	21 es múltiplo de 7 21 es divisible por 7

c. Divisibilidad y repartición

La relación de divisibilidad establece que una cantidad o número cabe exactamente en otra, por lo que es útil en situaciones contextuales que requieren de una repartición equitativa o de organización de conjuntos de elementos equivalentes, es decir, la misma cantidad de elementos o el mismo tamaño.

Una forma de argumentar matemáticamente esta relación es mediante la división entre estas cantidades, esto es, “una cantidad cabe exactamente en otra” es equivalente a verificar que el residuo de la división de una cantidad entre otra sea igual a cero.

Tabla 5. Ejemplos para argumentar matemáticamente la relación de divisibilidad

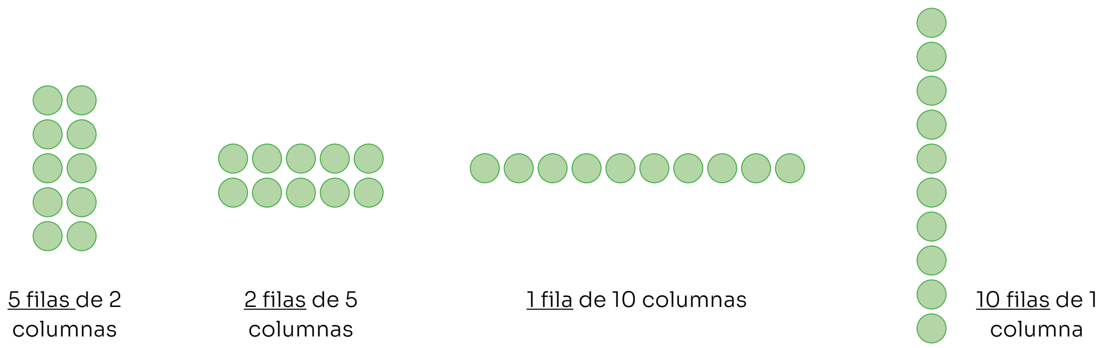
Existe una relación de divisibilidad entre el 45 y el 5	**No existe una relación de divisibilidad entre el 48 y el 5**
$45 \div 5 = 9$ y el resto es 0 o bien, $45 = 5 \times 9 + 0$	$48 \div 5 = 9$ y el resto es 3 o bien, $48 = 5 \times 9 + 3$
Esto es: **45 es múltiplo de 5 y divisible por 5**	Esto es: **48 no es múltiplo de 5 y no es divisible por 5**

d. Números primos y números compuestos

Una manera de referirse a un número es mediante la relación con otros números, es decir, si un número es mayor, menor o igual (relación de orden) que otro, si es antecesor o sucesor, si es la suma de otros números, o si es mútiplo o divisor de otro número, entre otras relaciones. Los números también pueden clasificarse en primos o compuestos, y son útiles para estudiar las relaciones de divisibilidad.

Una estrategia para representar e identificar a los números primos o compuestos es mediante los arreglos rectangulares. En este tipo de arreglos, la cantidad de filas que se logren organizar representará el número divisor de la cantidad total de elementos. Por ejemplo, el número 10 puede representarse con cuatro tipos de arreglos rectangulares.

Imagen 2. Representación del número 10 por medio de arreglos rectangulares



Por tanto, 10 es un número compuesto, ya que tiene como divisores al 5, el 2, el 1 y el 10. El número 5 solo tiene dos posibles arreglos rectangulares.

Imagen 3. Representación del número 5 mediante arreglos rectangulares

Debido a ello, el número 5 se considera un número primo, dado que solo tiene como divisores al número 1 y a sí mismo (5).

e. Descomposición en factores primos[3]

Todo número entero compuesto se expresa de forma única (principio de unicidad) como producto de números primos. Es decir, por un lado, todo número entero compuesto es resultado de multiplicar dos o más números primos y, por otro lado, la manera de expresar dicha multiplicación es única para cada número entero. Así, al proceso que consiste en dividir un número entero compuesto y expresarlo como producto de factores primos se lo conoce en matemáticas como **descomposición factorial**. Por ejemplo, el número 344 se puede expresar como el producto de los números primos 2 y 43, como se muestra a continuación.

$$344 = 2 \times 172$$
$$344 = 2 \times 2 \times 86$$
$$344 = 2 \times 2 \times 2 \times 43$$

f. Divisor común mayor

Se sabe que los divisores de un número entero son los números que lo dividen de manera exacta, esto es, que el residuo es igual a cero. Así, el divisor común mayor expresa el máximo valor de una cantidad o magnitud que cabe una cantidad exacta de veces en otras. Por ejemplo, 3 es el divisor común mayor de los números 9, 12 y 15, ya que es el máximo valor que cabe de forma exacta en los tres números (3 veces en 9, 4 veces en 12 y 5 veces en 15).

Tabla 6. Ejemplos de números divisores de 9, 12 y 15

Número	Divisores
9	1, **3**, 9
12	1, 2, **3**, 4, 6, 12
15	1, **3**, 5, 15

Aunque el número 1 también divide exactamente al 9, el 12 y el 15, el máximo valor entre los divisores comunes es el 3. Por ello, el divisor común mayor es útil para resolver situaciones en las que se requiere determinar el máximo valor que divide de manera exacta a dos o más cantidades.

g. Multiplicidad y proporcionalidad

La relación de multiplicidad entre dos números o cantidades permite determinar si existe proporcionalidad entre ellos. Por ejemplo, los números 3 y 6 mantienen una relación de multiplicidad, puesto que 6 es el producto de multiplicar el 3 por un factor proporcional 2. Así, el múltiplo de un número se obtiene de multiplicar dicho número por un número natural.

$3 \times 1 = 3$
$3 \times 2 = 6$
$3 \times 3 = 9$
$3 \times 4 = 12$
$3 \times 5 = 15$
$3 \times 6 = 18$
$3 \times 7 = 21$
$3 \times 8 = 24$
$3 \times 9 = 27$
$3 \times 10 = 30$

Las tablas de multiplicar son un ejemplo de este tipo de relaciones de multiplicidad. Así, para la tabla del 3, se genera la multiplicidad del 3 a partir de multiplicar por un número natural como factor de proporcionalidad, generando los múltiplos 3, 6, 9, 12, 15, etc. De esta manera, la multiplicidad es útil en situaciones contextuales que requieren de estudiar una escala u organizar cantidades o magnitudes que crezcan al duplicarlas, triplicarlas, etc.

3 El conocimiento matemático que refiere a la descomposición en factores primos se conoce como *teorema fundamental de la aritmética*. Señala que "cada entero $n > 1$ se puede representar como el producto de factores primos de forma única, salvo el orden de los factores" (Apostol, 1980, p. 20).

h. Múltiplo común menor

Se sabe que los múltiplos de un número entero son los números que se obtienen al multiplicarlo por otro número natural; por ende, el múltiplo común menor será el menor valor de todos los múltiplos comunes entre dos o más cantidades. Por ejemplo, 36 es el múltiplo común menor de los números 9, 12 y 18, ya que es el mínimo valor coincidente de todos los múltiplos de las tres cantidades.

Tabla 7. Ejemplos de números múltiplos de 9, 12 y 18

Número	Múltiplos
9	9, 18, 27, **36**, 45, 54, 63, 72, ...
12	12, 24, **36**, 48, 60, 72, 84, ...
18	18, **36**, 54, 72, 90, 108, ...

Aunque el número 72 también es múltiplo común al 9, el 12 y el 18, el mínimo valor entre los múltiplos comunes es el 36. Así, conviene destacar que el múltiplo común menor es útil para resolver situaciones en las que se requiere identificar o seleccionar una coincidencia próxima o menor entre varias medidas o cantidades dadas.

1.2.2. El sentido numérico y la dualidad de la matemática

Todo saber matemático es, a la vez, un objeto que se construye a partir de procesos o ideas matemáticas y, también, el mismo saber se emplea como proceso de construcción de nuevos saberes. Así, promover el sentido numérico y, en particular, el estudio de múltiplos y divisores, está acompañado de movilizar ambos aspectos de los saberes matemáticos, en tanto objeto y proceso.

De esta manera, un saber matemático central para trabajar con múltiplos y divisores corresponde a la multiplicación. En su carácter de objeto de saber, la multiplicación se conceptualiza como una relación entre tres o más cantidades para cuantificar una totalidad (en términos de cantidades o magnitud) cuya **unidad de referencia** (dada o seleccionada) se **repite una cierta cantidad de veces**. En *Estudiar y aprender en Cuarto* se presentan actividades que movilizan dicha conceptualización, por ejemplo:

Imagen 4. “¿Cuál es el cálculo?”, *Estudiar y aprender en Cuarto* (GCABA, 2023c, p. 27)

2. Proponé tres cálculos distintos con los que puedas averiguar cuántos lápices hay en total en las siguientes imágenes.

En esta actividad, la cantidad de lápices por cada vaso portalápices representa la unidad de referencia y se requiere su repetición por 5 veces, ya que son 5 los portalápices. Procedimentalmente, la multiplicación es una operación numérica para calcular y obtener el producto de dos o más números o cantidades (factores). Algunas actividades que pretenden atender el aspecto procedimental de la relación multiplicativa movilizan estrategias como la siguiente.

Imagen 5. "Multiplicar y dividir mentalmente", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, p. 42)

PARA AYUDAR A RESOLVER

Para completar .... x 3 = 96, ¿cuántas veces repetimos el 3 para formar el 96?
Podés pensar, por ejemplo: 30 x 3 = 90, 2 x 3 = 6. Entonces, 32 x 3 = 96.

En conjunto, dicha dualidad de la multiplicación puede expresarse como una estructura simbólica de la relación entre cantidades que permiten representar una situación de crecimiento o decrecimiento (agrupación o reparto, por ejemplo).

Estructura de la multiplicación: $a \times b = c$

En esta expresión, los números *a* y *b* se conocen como *factores de la multiplicación*, y el número *c*, como *el producto de la multiplicación de los factores*. Así, actividades como la señalada en la **Imagen 6**, permiten enfatizar lo que representa cada uno de los factores 3 y 5 en la situación de estudio. Uno de los factores representa la unidad de referencia (figuritas por paquete) y el otro factor representa la cantidad de veces que se repite la unidad (cantidad de paquetes).

Imagen 6. "Cálculos con paquetes y figuritas", *Estudiar y aprender en Tercero* (GCABA, 2023b, p. 56)

PARA TENER EN CUENTA

Recordá que en los problemas donde se suma muchas veces el mismo número se puede usar una multiplicación para resolverlos. La multiplicación se escribe con el signo **x**.

Por ejemplo: la **actividad 1** de la página anterior se puede resolver usando el cálculo 5 + 5 + 5. Esto se escribe 3 x 5 o también 5 x 3 y se lee "tres por cinco" o "cinco por tres".

3 x 5 → figuritas por paquete
↓
cantidad de paquetes

o también

5 x 3 → cantidad de paquetes
↓
figuritas por paquete

La estructura multiplicativa, entonces, puede representarse como 3×5 o bien 5×3, tal como se señala en la actividad presentada en la **Imagen 6**, **siempre y cuando se clarifique cuál representa la unidad de referencia y cuál la cantidad de repeticiones**, pues solo de esta manera se concluye la equivalencia numérica con la que se está trabajando en la situación: $3 \times 5 = 5 \times 3 = 5 + 5 + 5$.

Lo anterior es de suma importancia ya que, si bien matemáticamente hablando "el orden de los factores no altera el producto", **la lectura e interpretación conceptual de una multiplicación es distinta para *a* × *b* = *c* y *b* × *a* = *c***, pues expresan las siguientes relaciones.

Formas de expresar 3 veces el 5:

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5, \text{ o bien } 5 \times 3 = 5 + 5 + 5$$

Formas de expresar 5 veces el 3:

$$3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3, \text{ o bien } 5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

Así, la estructura multiplicativa $a \times b = c$ puede expresar "se adiciona *a* veces el número *b* y se obtiene *c*", o bien "se adiciona *b* veces el número *a* y se obtiene *c*", por lo que son formas distintas de expresar una unidad de referencia y la agrupación de los elementos. Para el estudio de la multiplicidad, en particular para significar el múltiplo de un número natural, en *Estudiar y aprender en Séptimo* se presenta como "el resultado de multiplicar ese número por cualquier número natural".

Imagen 7. "Usar la calculadora para investigar sobre múltiplos y divisores", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, p. 31)

PARA REFLEXIONAR Y REVISAR

Un número natural es múltiplo de otro cuando es el resultado de multiplicar ese número por cualquier número natural.

Por ejemplo, todos los resultados de la tabla del 7 son múltiplos de 7. Si se continúa la tabla más allá de 7 x 10, esos resultados también son múltiplos de 7.

Un número natural es divisor de otro si, al dividir el segundo por el primero, el resto da 0. Si un número es múltiplo de otro, el segundo es divisor del primero.

Por ejemplo, 6 x 40 = 240, entonces 6 y 40 son divisores de 240. También se dice que 240 es divisible por 6 y por 40. A su vez, 240 es múltiplo de 6 y de 40.

Así, la relación $a \times b$ genera un múltiplo de los factores *a* y *b* . Para poder generarlo, didácticamente conviene identificar el factor *a* como el número natural inicial del cual parte el procedimiento, y el factor *b* como el número natural por el cual se multiplica para obtener un múltiplo del número *a*.

1.2.3. Enseñanza y aprendizaje de la multiplicación-división y la multiplicidad-divisibilidad

La enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación requiere de una conceptualización en conjunto con la división a partir del estudio de la estructura que las constituye: $c = a \times b$.

La unidad de referencia expresada en *a* se repite una cantidad *b* de veces y se obtiene *c*. Al mismo tiempo, dicha estructura expresa una división ya que "*a* cabe exactamente *b* veces en el número *c*", lo que es equivalente a la estructura siguiente: $c/a = b$.

Lo anterior es equivalente a lo que se expresa curricularmente con los términos asociados al algoritmo de la división, donde lo que se requiere es determinar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo.

Imagen 8. *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, p. 29) y *Actualización Curricular. 7.° grado. Documento de Trabajo* (2001, p. 75)

PARA RECORDAR

Dividendo → 126 | 5 ← Divisor

26 25 ← Cociente

Resto → 1

PARA REFLEXIONAR Y REVISAR

En toda cuenta de dividir, se cumple la siguiente relación:

Dividendo = divisor x cociente + resto.

Además, el resto debe ser menor que el divisor.

Pero también se plantea un trabajo en torno a la relación $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$

que se expresa en el Pre Diseño Curricular del segundo ciclo de la siguiente manera: Utilización de la relación c x d + r = D (r < d) para resolver problemas.[7]

La división entera continúa siendo un objeto de trabajo en séptimo grado. La intención es que los alumnos se enfrenten a diversos problemas a través de los cuales deban tratar la fórmula Dividendo = divisor x cociente + resto; resto < divisor, ya no sólo como comprobación de una cuenta ya realizada sino como una relación que permite analizar y anticipar resultados. Se busca que puedan centrar el análisis en las condiciones que cumple cada uno de los números que intervienen en dicha "fórmula", haciendo explícita ciertas características de la relación D = c x d + r (r < d).

De esta manera, es importante hacer notar que, en contextos donde se emplea el algoritmo de la división, el orden de las estructuras $c \times d$ o $d \times c$ son distintas, ya que, aunque numéricamente son iguales, los factores c y d expresan al cociente y al divisor, los cuales adquieren sentido como cantidad de veces que se repite (cociente) la unidad de referencia (divisor). Es decir, en la estructura multiplicativa de la división siempre se representará **la adición del número *d* (divisor) una cantidad *c* (cociente) de veces** y nunca al revés, pues carece de sentido.

De la misma forma, la multiplicidad y la divisibilidad en tanto relaciones entre cantidades conviene que se conceptualicen en conjunto como parte de una misma estructura: $c = a \times b + n$, donde $n = 0$.

La divisibilidad es útil para situaciones en las que se requiere determinar cuántas veces cabe una cantidad en otra. Así, podemos relacionar los números 48, 5 y 9 de la manera siguiente: 48 = 5 × 9 + 3. Esto expresa, por ejemplo, que el número 5 cabe 9 veces en el 48, pero no de forma exacta, pues sobran 3, por lo que no existe una relación de divisibilidad entre estos tres números. Sin embargo, para los números 45, 9 y 5, sí la hay, ya que se puede verificar que el número 5 cabe exactamente 9 veces en el número 45, pues 45 = 5 × 9 + 0. Así, se puede afirmar que el número 45 es divisible por 5.

Al mismo tiempo, la relación anterior se puede interpretar como “el número 5 se adiciona 9 veces y se obtiene el 45”, esto es, 45 es múltiplo del número 5 y también del número 9, pues la relación de multiplicidad expresa cómo las cantidades se obtienen al multiplicar un número por otro número natural.

1.2.4. El uso del signo *igual*

El estudio de los múltiplos y divisores requiere de la interpretación, representación y modificación de las escrituras de dichas relaciones en otras más convenientes. Reconocer que todo número puede expresarse como la composición de multiplicaciones (factores) permite analizar las distintas formas equivalentes de expresar dicho número mediante multiplicaciones. Así, el uso del signo de igualdad (=) a veces expresa la resolución de una operación o relación entre cantidades, pero otras veces expresa una equivalencia de expresiones.

Tabla 8. Ejemplos del uso del signo *igual*

Uso del signo = como operador	**Uso del signo = como equivalencia de expresiones**
$12 \times 15 = 180$	$12 \times 15 = 4 \times 3 \times 5 \times 3$

Movilizar el pensamiento numérico requiere de la interpretación y expresión (escritura) de las relaciones numéricas, así como del análisis de las estrategias procedimentales para operar y del establecimiento de diversas relaciones numéricas equivalentes que dan sentido a la descomposición en factores compuestos o primos. Por ejemplo, durante el tránsito de la educación primaria a la secundaria se requerirá descontextualizar las relaciones multiplicativas para ingresar a problemas de reescritura o descomposición que son funcionales para el uso de los criterios de divisibilidad; por ejemplo, al solicitar expresar el número 12 como producto entre dos números naturales donde uno sea el 5, ¿será posible representar al 12 con un factor 5?

1.2.5. Criterios de divisibilidad entre números

Los criterios de divisibilidad expresan las condiciones numéricas mínimas necesarias que permiten analizar la descomposición de un número en términos de las propiedades de las cifras que lo componen y sirven para determinar si un número es divisible por otro o no sin efectuar la división entre ellos.

El estudio de los criterios de divisibilidad, contrariamente a la memorización de la regla, se propone mediante el análisis de arreglos numéricos que expresan las estructuras básicas $2n$, $3n$, $5n$, por ejemplo.

a. Criterio de divisibilidad por 2

Siempre que se considere una estructura $2n$, con n en los naturales distinto a cero, se corresponderá a un número múltiplo de 2. Así, $4 = 2 \times 2$; $20 = 2 \times 10$; $150 = 2 \times 75$ expresan números pares, múltiplos de 2 y por lo tanto divisibles por 2. De esta manera se puede analizar la estructura de todo número entero mediante el análisis de un arreglo numérico por notación desarrollada respecto al sistema decimal como sigue:

$$325 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 \text{ o bien, } 325 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1$$

Al ser 10, 100 y 1.000 números múltiplos de 2, el criterio para determinar la divisibilidad de 325 entre 2 recae en la cifra de las unidades, en este caso el 5. Así, 320 será divisible por 2, pero al no poder asegurar que 5 se reescribe con la estructura $2n$, entonces 325 no será divisible por 2. En conclusión, para que un número entero sea divisible por 2, basta con que la cifra de las unidades sea múltiplo de 2.

b. Criterio de divisibilidad por 3

De manera similar se puede analizar el criterio de divisibilidad por 3 con la estructura $3n$.

$$585 = 5 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$$
$$\text{Pero } 100 = 99 + 1 \text{ y } 10 = 9 + 1\text{, entonces,}$$
$$585 = 5 \times 99 + \mathbf{5 \times 1} + 8 \times 9 + \mathbf{8 \times 1} + 5 \times 1$$

Así, 999, 99 y 9 son números múltiplos de 3 y cumplen con la estructura $3n$, por lo tanto, el análisis de la divisibilidad recaerá en las cifras 5, 8 y 5. Por eso, un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de tres, como se cumple en el caso del 585.

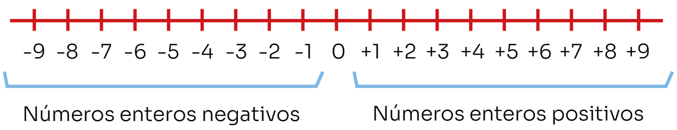
De manera análoga, con el empleo de los arreglos numéricos y el conocimiento de las estructuras de los múltiplos, se recomienda tratar didácticamente la construcción de los criterios de divisibilidad.

1.2.6. De los números naturales a los enteros

En segundo año de secundaria se retoma el estudio de los múltiplos y divisores integrando los números enteros en el análisis de la relación entre la multiplicidad y la divisibilidad. Por ello es conveniente señalar una reflexión sobre el significado de los signos + y - para el trabajo operativo e interpretativo en la aritmética.

Los signos de *más* (+) y de *menos* (–) representan indicadores de operatividad, es decir, indican operaciones de sumar o restar, respectivamente. Sin embargo, también indican la representación de un número positivo o negativo.

Imagen 9. Representación de los números enteros en la recta numérica



Así, el uso de los números positivos y negativos, en conjunto con el número cero como punto de referencia, ayudan para representar situaciones con **cualidades opuestas** respecto a una referencia (por lo general es el papel del número 0, pero no en todos los casos), por ejemplo, ganar-perder, bueno-malo, bajo-alto, frío-caliente, etc. Por ejemplo, ante la frase “La Ciudad Autónoma de Buenos Aires se encuentra a 25 metros sobre el nivel del mar”, la situación puede representarse con ayuda del número entero 25 y la unidad de medida en metros: 25 m. Y ante la frase “Mexicali, en Baja California, México, se encuentra a 2 metros bajo el nivel del mar”, la situación puede representarse con ayuda del número -2 y la unidad de referencia respectiva: -2 m. En estos casos, el punto de referencia para expresar los 2 m o -2 m es el nivel del mar.

1.3. Problematización de la matemática escolar

Este apartado presenta las ideas fuerza que se proponen movilizar de manera transversal en el sistema educativo para desarrollar el contenido de múltiplos y divisores. Sobre la base de lo que se presentó en los apartados anteriores, la ubicación curricular y la contextualización disciplinar, se proponen las nociones matemáticas que se consideran de relevancia para trabajar durante la articulación escolar.

1. El pensamiento numérico establece **relaciones numéricas** mediante el estudio de las cantidades, sus representaciones diversas y la forma de operarlas mediante el establecimiento de una estructura que lo permita. En el caso de múltiplos y divisores, la estructura que expresa las relaciones y operaciones respectivas se representa de la manera siguiente:

$$c = a \times b + n, \text{ donde } n = 0$$

El estudio de este tipo de relaciones permite que podamos realizar actividades básicas como ordenar, agrupar, contar y repartir de manera más conveniente a partir de estructuras aritméticas multiplicativas (multiplicación, división) y aditivas (adición, sustracción).

2. Algunas formas de promover el sentido numérico son mediante:

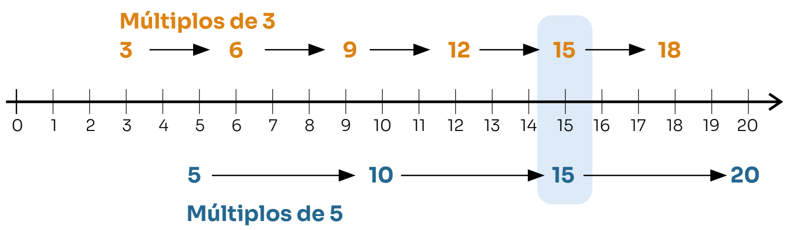
a. Reconocer patrones de comportamiento de las cantidades y asociarlos a sus representaciones numéricas y/o geométricas, por ejemplo, al trabajar con el múltiplo común menor, ya que, al analizar, por ejemplo, los múltiplos comunes del 3 y el 5, se puede identificar el siguiente patrón de comportamiento:

3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60
5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95

A partir de este patrón se plantea que **cada 3 veces el 5 se obtiene un múltiplo de 3** y también **cada 5 veces el 3 se obtiene un múltiplo de 5 o que cabe un número exacto de veces en 5**, por ende, los múltiplos comunes entre 3 y 5 coincidirán cada 15 números (15, 30, 45, 60, 75, 90, ...).

b. Representar las relaciones numéricas generales y expresarlas a través de estructuras aritméticas (aditivas o multiplicativas). Una representación del múltiplo común menor (mcm) en la recta numérica favorece la observación del intervalo de repetición de los múltiplos comunes del 3 y el 5 (cada 15 números).

Imagen 10. Representación de los múltiplos de 3 y 5



c. El uso razonado de las operaciones aritméticas (algoritmos con sentido), por ejemplo, al emplear la estrategia de identificación de un "número seguro o conocido" como punto de partida para analizar la multiplicidad.

En el caso de que se requiera determinar si 620 es múltiplo de 3, se puede recurrir a la relación $3 \times 100 = 300$ como punto de partida para analizar la multiplicidad de la manera siguiente: $3 \times 200 = 600$ y $3 \times 7 = 21$. Así que $3 \times 207 = 621$ y con ello concluir que 620 no es múltiplo de 3.

Otro ejemplo se puede observar en el procedimiento para calcular una multiplicación como la que sigue:

$$12 \times 15 = 4 \times 3 \times 5 \times 3$$
$$12 \times 15 = 4 \times 5 \times 3 \times 3$$
$$12 \times 15 = 20 \times 9$$
$$12 \times 15 = 180$$

En este caso, la descomposición en factores y su reagrupación en multiplicaciones conocidas, así como el uso de las propiedades asociativas y conmutativas de los números, permiten argumentar el cálculo correcto de dicha multiplicación.

3. Promover distintas situaciones en las que se utilizan las relaciones multiplicativas: situaciones de agrupación y repetición, o bien de distribución y reparto.

4. Promover la dualidad de significado del signo *igual* (=) como operador para expresar un resultado y para expresar equivalencia entre expresiones numéricas (ver **Tabla 8**).

5. Interpretación de la relación multiplicativa. En la expresión de equivalencia siguiente:

$$c = a \times b \text{ , o bien } c = a \times b + 0$$

cuando se expresa que "se adiciona *b* veces el número *a* y se obtiene *c*", el número a representa la unidad de referencia que se repetirá *b* veces. Pero en el caso de que se interprete como "se adiciona *a* veces el número *b* y se obtiene *c*", la unidad de referencia será *b* y esta se repetirá un número *a* de veces. En cualquier caso, al leer o interpretar la relación multiplicativa conviene destacar qué factor representa la unidad de referencia y cuál, la cantidad de veces que se adiciona.

6. Interpretación de la relación de divisibilidad. Por ejemplo, la expresión $c = a \times b + 0$ también puede interpretarse como sigue: "el número *a* cabe exactamente *b* veces en el número *c*". Por lo tanto, se puede afirmar que el número *c* es divisible por *a*.

7. Interpretación de los criterios de divisibilidad mediante el uso de los arreglos numéricos y la notación desarrollada en el sistema decimal (ver apartado 1.2.5).

8. Promover diversas interpretaciones de la noción de *múltiplo de un número*.
- **a.** Un número es múltiplo del número *n* si se obtiene sumando una cantidad de veces *n*.
- **b.** Un número es múltiplo del número *n* si se puede escribir como una multiplicación por *n*.
- **c.** Siempre que se multiplica un número por otro, el resultado es un múltiplo de cada uno de esos dos números.

d. Un número natural *a* es múltiplo de un número natural *b* cuando *a* puede expresarse como el producto de *b* por otro número *c*.

Determinar el múltiplo común menor de un conjunto de números naturales será útil para situaciones que requieren de la identificación de una coincidencia, ya que nos aporta el menor valor de todos los múltiplos comunes.

9. Promover múltiples interpretaciones de la noción de *divisor de un número*.
a. Un número es divisor del número *n* si al dividir *n* por este número se obtiene como resto 0.
b. Un número es divisor de *n* si se puede encontrar otro número *m* que, multiplicado por el divisor, da como resultado *n*.
c. Si un número es resultado de la multiplicación de dos factores, cada uno de estos factores es un divisor del número dado.

El divisor común mayor de un conjunto de números naturales nos ayuda en situaciones que requieren el mayor valor o medida que cabe una cantidad exacta de veces en otros valores o medidas, ya que determina el mayor de los números divisores que dos o más números tienen en común.

1.4. ¿Cómo operativizar las ideas fuerza?

Sobre la base de los materiales *Estudiar y aprender* para primaria, *Estudiar y aprender* para secundaria, las secuencias didácticas de primaria, las secuencias didácticas de secundaria y lo abordado en los apartados anteriores sobre la ubicación curricular y la contextualización disciplinar, proponemos una manera de operativizar las ideas fuerza presentadas en el apartado anterior sobre la problematización de la matemática escolar.

PDF
Estudiar y aprender para primaria
https://bit.ly/3SEMZw0

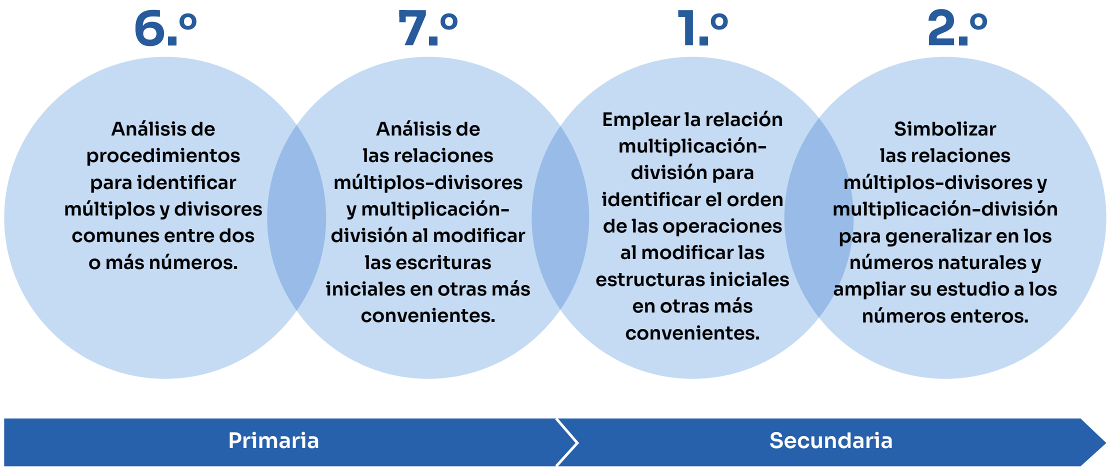
PDF
Estudiar y aprender para secundaria
https://bit.ly/49KhKqf

PDF
Secuencias didácticas de primaria
https://bit.ly/3T6Ku7e

PDF
Secuencias didácticas de secundaria
https://bit.ly/4bNJHPS

El acercamiento para la tarea relativa a múltiplos y divisores que se propone para el tránsito del segundo ciclo del nivel primario al ciclo básico del nivel secundario puede sintetizarse en los siguientes objetivos por año escolar.

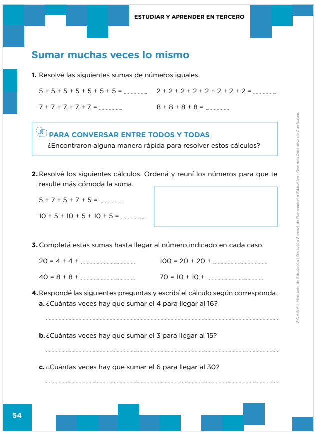
Imagen 11. Propuesta de objetivos por año escolar para el tránsito de múltiplos y divisores



3.° grado

Objetivo: conceptualización y análisis de la multiplicación y de la relación de multiplicidad.

Se plantea un acercamiento a la conceptualización de la multiplicación a través de la suma iterada por medio de cuestionamientos en los que se solicita identificar cuántas veces hay que adicionar un mismo número para obtener un resultado específico. También se favorece el agrupamiento de una cierta cantidad de elementos con la finalidad de considerar dicho agrupamiento como una unidad de referencia que se repite cierta cantidad de veces (GCABA, 2023b, p. 54).



ESTUDIAR Y APRENDER EN TERCERO

Sumar muchas veces lo mismo

1. Resolvé las siguientes sumas de números iguales.

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = ... 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = ...

7 + 7 + 7 + 7 + 7 = ... 8 + 8 + 8 + 8 = ...

PARA CONVERSAR ENTRE TODOS Y TODAS
¿Encontraron alguna manera rápida para resolver estos cálculos?

2. Resolvé los siguientes cálculos. Ordená y reuní los números para que te resulte más cómoda la suma.

5 + 7 + 5 + 7 + 5 = ...

10 + 5 + 10 + 5 + 10 + 5 = ...

3. Completá estas sumas hasta llegar al número indicado en cada caso.

20 = 4 + 4 + ... 100 = 20 + 20 + ...

40 = 8 + 8 + ... 70 = 10 + 10 + ...

4. Respondé las siguientes preguntas y escribí el cálculo según corresponda.

a. ¿Cuántas veces hay que sumar el 4 para llegar al 16?

b. ¿Cuántas veces hay que sumar el 3 para llegar al 15?

c. ¿Cuántas veces hay que sumar el 6 para llegar al 30?

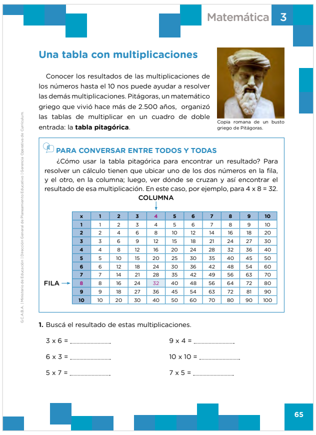
G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

54

PDF

"Sumar muchas veces lo mismo", *Estudiar y aprender en Tercero* (GCABA, 2023b, p. 54)
https://bit.ly/4355IpH

La actividad de agrupar o repetir los mismos elementos cierta cantidad de veces se sintetiza por medio de la tabla pitagórica, que muestra las relaciones de multiplicidad entre los números del 1 al 10 a partir de su organización en filas y columnas (GCABA, 2023b, p. 65).



Matemática 3

Una tabla con multiplicaciones

Conocer los resultados de las multiplicaciones de los números hasta el 10 nos puede ayudar a resolver las demás multiplicaciones. Pitágoras, un matemático griego que vivió hace más de 2.500 años, organizó las tablas de multiplicar en un cuadro de doble entrada: la **tabla pitagórica**.

Copia romana de un busto griego de Pitágoras.

PARA CONVERSAR ENTRE TODOS Y TODAS

¿Cómo usar la tabla pitagórica para encontrar un resultado? Para resolver un cálculo tienen que ubicar uno de los dos números en la fila, y el otro, en la columna; luego, ver dónde se cruzan y así encontrar el resultado de esa multiplicación. En este caso, por ejemplo, para 4 x 8 = 32.

COLUMNA

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
FILA → 8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1. Buscá el resultado de estas multiplicaciones.

3 x 6 = ... 9 x 4 = ...

6 x 3 = ... 10 x 10 = ...

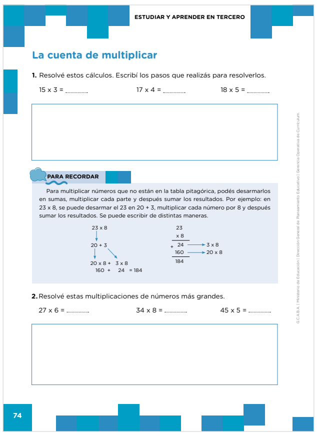
5 x 7 = ... 7 x 5 = ...

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum

65

“Una tabla con multiplicaciones”, *Estudiar y aprender en Tercero* (GCABA, 2023b, p. 65)
https://bit.ly/3ONFvWn

Se cierra tercer grado con el abordaje de la multiplicación, analizando su forma operativa. Se propone una estrategia para multiplicar números que están fuera de la tabla pitagórica al descomponer en sumas uno de los factores, multiplicar cada parte por el segundo factor y, después, sumar los resultados (GCABA, 2023b, p. 74).



ESTUDIAR Y APRENDER EN TERCERO

La cuenta de multiplicar

1. Resolvé estos cálculos. Escribí los pasos que realizás para resolverlos.

15 x 3 = ... 17 x 4 = ... 18 x 5 = ...

PARA RECORDAR

Para multiplicar números que no están en la tabla pitagórica, podés desarmarlos en sumas, multiplicar cada parte y después sumar los resultados. Por ejemplo: en 23 x 8, se puede desarmar el 23 en 20 + 3, multiplicar cada número por 8 y después sumar los resultados. Se puede escribir de distintas maneras.

23 x 8
20 + 3
20 x 8 + 3 x 8
160 + 24 = 184

23
x 8
+ 24 → 3 x 8
160 → 20 x 8
184

2. Resolvé estas multiplicaciones de números más grandes.

27 x 6 = ... 34 x 8 = ... 45 x 5 = ...

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

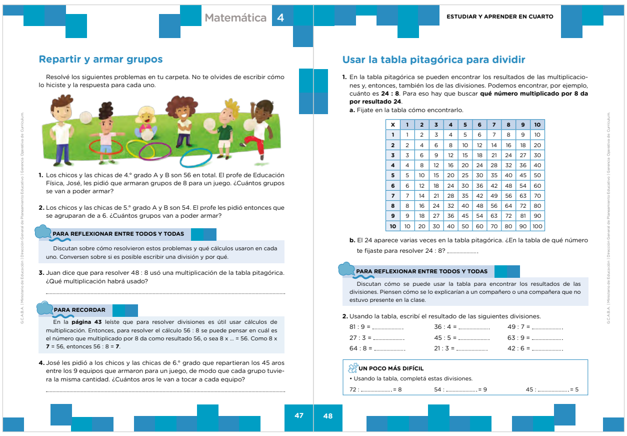
74

“La cuenta de multiplicar”, *Estudiar y aprender en Tercero* (GCABA, 2023b, p. 74)
https://bit.ly/3ORVymk

4.° grado

Objetivo: conceptualización y análisis de la división y de la relación de divisibilidad.

Se inicia retomando las relaciones multiplicativas entre dos números naturales al abordar problemas de agrupación y repartición con el fin de emplearlas para dividir mediante situaciones de reparto y el empleo de la tabla pitagórica. Se puede observar en las páginas de *Estudiar y aprender en Cuarto* (GCABA, 2023c, pp. 47 y 48) que la propuesta de solución parte de proponer una multiplicación, es decir, “¿qué número multiplicado por 8 da como resultado 56?” y “¿qué número multiplicado por 6 da como resultado 54?”, lo que también podría pensarse como: ¿de qué números son múltiplos 56 y 54? Para ambos casos se podría plantear como: 8 × .... = 56 y 6 × .... = 54.



Matemática 4

Repartir y armar grupos

Resolvé los siguientes problemas en tu carpeta. No te olvides de escribir cómo lo hiciste y la respuesta para cada uno.

1. Los chicos y las chicas de 4.° grado A y B son 56 en total. El profe de Educación Física, José, les pidió que armaran grupos de 8 para un juego. ¿Cuántos grupos se van a poder armar?
2. Los chicos y las chicas de 5.° grado A y B son 54. El profe les pidió entonces que se agruparan de a 6. ¿Cuántos grupos van a poder armar?

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

Discutan sobre cómo resolvieron estos problemas y qué cálculos usaron en cada uno. Conversen sobre si es posible escribir una división y por qué.

3. Juan dice que para resolver 48 : 8 usó una multiplicación de la tabla pitagórica. ¿Qué multiplicación habrá usado?

PARA RECORDAR

En la **página 43** leíste que para resolver divisiones es útil usar cálculos de multiplicación. Entonces, para resolver el cálculo 56 : 8 se puede pensar en cuál es el número que multiplicado por 8 da como resultado 56, o sea 8 x ... = 56. Como 8 x **7** = 56, entonces 56 : 8 = **7**.

4. José les pidió a los chicos y las chicas de 6.° grado que repartieran los 45 aros entre los 9 equipos que armaron para un juego, de modo que cada grupo tuviera la misma cantidad. ¿Cuántos aros le van a tocar a cada equipo?

47

48

ESTUDIAR Y APRENDER EN CUARTO

Usar la tabla pitagórica para dividir

1. En la tabla pitagórica se pueden encontrar los resultados de las multiplicaciones y, entonces, también los de las divisiones. Podemos encontrar, por ejemplo, cuánto es **24 : 8**. Para eso hay que buscar **qué número multiplicado por 8 da por resultado 24**.
   a. Fijate en la tabla cómo encontrarlo.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

   b. El 24 aparece varias veces en la tabla pitagórica. ¿En la tabla de qué número te fijaste para resolver 24 : 8? ....

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

Discutan cómo se puede usar la tabla para encontrar los resultados de las divisiones. Piensen cómo se lo explicarían a un compañero o una compañera que no estuvo presente en la clase.

2. Usando la tabla, escribí el resultado de las siguientes divisiones.

81 : 9 = ... 36 : 4 = ... 49 : 7 = ...
27 : 3 = ... 45 : 5 = ... 63 : 9 = ...
64 : 8 = ... 21 : 3 = ... 42 : 6 = ...

UN POCO MÁS DIFÍCIL

• Usando la tabla, completá estas divisiones.

72 : .... = 8 54 : .... = 9 45 : .... = 5

“Repartir y armar grupos” y “Usar la tabla pitagórica para dividir”, *Estudiar y aprender en Cuarto* (GCABA, 2023c, pp. 47 y 48)
https://bit.ly/4bPnpNC

Con el planteamiento anterior, conviene que se retome la tabla pitagórica para determinar el múltiplo o bien el número que, multiplicado por otro, dé el resultado esperado, con el fin de introducir la relación entre la multiplicación y la división, lo cual permite pensar soluciones como:

$$8 \times 7 = 56, \text{ entonces } 56 : 8 = 7$$
$$6 \times 9 = 54, \text{ entonces } 54 : 6 = 9$$

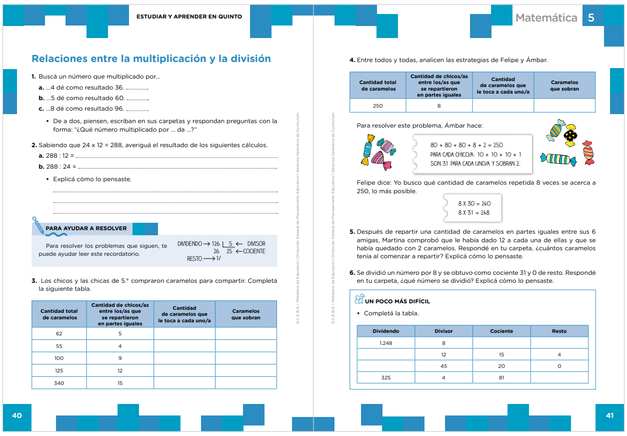
5.° grado

Objetivo: análisis de las relaciones multiplicación-división y múltiplo-divisor.

Se trabaja en la consolidación de las relaciones entre la multiplicación y la división, así como entre múltiplo y divisor, con la finalidad de profundizar en la relación en la que el dividendo se reescribe como el producto del divisor por el cociente y se adiciona el resto, mediante actividades en las que hay que identificar un número tal que, al multiplicarlo por otro, se obtenga un resultado determinado.

La actividad de *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 40 y 41) solicita que se completen tablas en las que se requiere analizar los elementos que se proporcionan para identificar los faltantes. Por ejemplo, en el apartado “Un poco más difícil” (p. 41), en la segunda fila de la tabla, se retoman los valores del divisor, cociente y resto para determinar el dividendo:

$$D = d \times c + r$$
$$D = 12 \times 15 + 4$$
$$D = 184$$



ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO

Relaciones entre la multiplicación y la división

1. Buscá un número que multiplicado por...
   a. ...4 dé como resultado 36. ....
   b. ...5 dé como resultado 60. ....
   c. ...8 dé como resultado 96. ....
   • De a dos, piensen, escriban en sus carpetas y respondan preguntas con la forma: “¿Qué número multiplicado por ... da ...?”
2. Sabiendo que 24 x 12 = 288, averiguá el resultado de los siguientes cálculos.
   a. 288 : 12 = ...
   b. 288 : 24 = ...
   • Explicá cómo lo pensaste.

PARA AYUDAR A RESOLVER

Para resolver los problemas que siguen, te puede ayudar leer este recordatorio.

DIVIDENDO → 126 | 5 ← DIVISOR
26 25 ← COCIENTE
RESTO → 1/

3. Los chicos y las chicas de 5.° compraron caramelos para compartir. Completá la siguiente tabla.

Cantidad total de caramelos	Cantidad de chicos/as entre los/as que se repartieron en partes iguales	Cantidad de caramelos que le toca a cada uno/a	Caramelos que sobran
62	5		
55	4		
100	9		
125	12		
340	15		

40

Matemática 5

4. Entre todos y todas, analicen las estrategias de Felipe y Ámbar.

Cantidad total de caramelos	Cantidad de chicos/as entre los/as que se repartieron en partes iguales	Cantidad de caramelos que le toca a cada uno/a	Caramelos que sobran
250	8		

Para resolver este problema, Ámbar hace:

80 + 80 + 80 + 8 + 2 = 250
PARA CADA CHICO/A: 10 + 10 + 10 + 1
SON 31 PARA CADA UNO/A Y SOBRAN 2.

Felipe dice: Yo busco qué cantidad de caramelos repetida 8 veces se acerca a 250, lo más posible.

8 X 30 = 240
8 X 31 = 248

5. Después de repartir una cantidad de caramelos en partes iguales entre sus 6 amigas, Martina comprobó que le había dado 12 a cada una de ellas y que se había quedado con 2 caramelos. Respondé en tu carpeta, ¿cuántos caramelos tenía al comenzar a repartir? Explicá cómo lo pensaste.
6. Se dividió un número por 8 y se obtuvo como cociente 31 y 0 de resto. Respondé en tu carpeta, ¿qué número se dividió? Explicá cómo lo pensaste.

UN POCO MÁS DIFÍCIL

• Completá la tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
1.248	8		
	12	15	4
	45	20	0
325	4	81	

41

“Relaciones entre la multiplicación y la división”, *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 40 y 41)
https://bit.ly/48k8Te5

O bien se analiza la relación planteada en la última fila de la tabla para determinar el resto:

$$325 = 4 \times 81 + r$$
$$325 = 324 + r$$

Dado que al multiplicar el divisor por el cociente no se obtiene el mismo resultado que el dividendo, significa que 4 no es divisor exacto de 325 y, por lo tanto, la cantidad que hace falta para completar el dividendo, que en este caso es 1, es el resto en la división.

Se concluye quinto grado mediante el análisis de resultados de una multiplicación o división con el objetivo de identificar los resultados de otras multiplicaciones y otras divisiones. Por ejemplo, para calcular el producto de los factores 5 y 19 se puede utilizar el producto conocido de 5 × 20 = 100 para el siguiente análisis:

$$5 \times 20 = 100$$
$$100 - 5 = 95$$

Lo que sería equivalente a:

$$5 \times 19 = 95$$

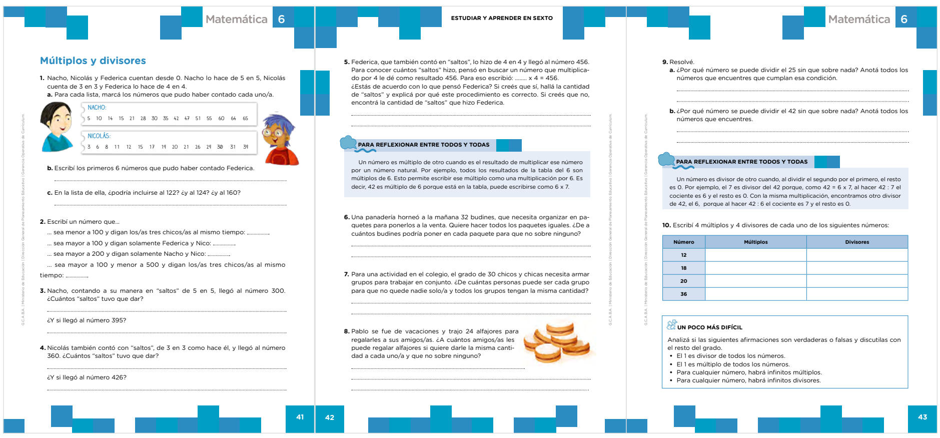
6.° grado

Objetivo: análisis de procedimientos para identificar múltiplos y divisores comunes entre dos o más números.

Se inicia consolidando las ideas abordadas a lo largo de los grados previos, tales como las propiedades y el funcionamiento de la multiplicación y la división, y la relación entre multiplicación y división como antecesora a múltiplos y divisores.

En particular, se parte de considerar ciertos datos como:

a. Los múltiplos de un número son los números que se obtienen de multiplicarlo por un número natural; por lo tanto, tendrá infinitos múltiplos.
b. Los divisores de un número entero son aquellos números que lo dividen de manera exacta, es decir, que el residuo de la división es cero; por lo tanto, tendrá una cantidad limitada de divisores.
c. Si un número es múltiplo de otro, entonces el segundo es divisor del primero (GCABA, 2023e, pp. 41-43).



Matemática 6

Múltiplos y divisores

1. Nacho, Nicolás y Federica cuentan desde 0. Nacho lo hace de 5 en 5, Nicolás cuenta de 3 en 3 y Federica lo hace de 4 en 4.
   a. Para cada lista, marcá los números que pudo haber contado cada uno/a.
   NACHO: 5 10 14 15 21 28 30 35 42 47 51 55 60 64 65
   NICOLÁS: 3 6 8 11 12 15 17 19 20 21 26 29 30 31 39
   b. Escribí los primeros 6 números que pudo haber contado Federica.
   c. En la lista de ella, ¿podría incluirse al 122? ¿y al 124? ¿y al 160?
2. Escribí un número que...
   ... sea menor a 100 y digan los/as tres chicos/as al mismo tiempo: ....
   ... sea mayor a 100 y digan solamente Federica y Nico: ....
   ... sea mayor a 200 y digan solamente Nacho y Nico: ....
   ... sea mayor a 100 y menor a 500 y digan los/as tres chicos/as al mismo tiempo: ....
3. Nacho, contando a su manera en "saltos" de 5 en 5, llegó al número 300. ¿Cuántos "saltos" tuvo que dar?
   ¿Y si llegó al número 395?
4. Nicolás también contó con "saltos", de 3 en 3 como hace él, y llegó al número 360. ¿Cuántos "saltos" tuvo que dar?
   ¿Y si llegó al número 426?

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

41

42

ESTUDIAR Y APRENDER EN SEXTO

5. Federica, que también contó en "saltos", lo hizo de 4 en 4 y llegó al número 456. Para conocer cuántos "saltos" hizo, pensó en buscar un número que multiplicado por 4 le dé como resultado 456. Para eso escribió: .... x 4 = 456.
   ¿Estás de acuerdo con lo que pensó Federica? Si creés que sí, hallá la cantidad de "saltos" y explicá por qué este procedimiento es correcto. Si creés que no, encontrá la cantidad de "saltos" que hizo Federica.

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

Un número es múltiplo de otro cuando es el resultado de multiplicar ese número por un número natural. Por ejemplo, todos los resultados de la tabla del 6 son múltiplos de 6. Esto permite escribir ese múltiplo como una multiplicación por 6. Es decir, 42 es múltiplo de 6 porque está en la tabla, puede escribirse como 6 x 7.

6. Una panadería horneó a la mañana 32 budines, que necesita organizar en paquetes para ponerlos a la venta. Quiere hacer todos los paquetes iguales. ¿De a cuántos budines podría poner en cada paquete para que no sobre ninguno?
7. Para una actividad en el colegio, el grado de 30 chicos y chicas necesita armar grupos para trabajar en conjunto. ¿De cuántas personas puede ser cada grupo para que no quede nadie solo/a y todos los grupos tengan la misma cantidad?
8. Pablo se fue de vacaciones y trajo 24 alfajores para regalarles a sus amigos/as. ¿A cuántos amigos/as les puede regalar alfajores si quiere darle la misma cantidad a cada uno/a y que no sobre ninguno?

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

Matemática 6

9. Resolvé.
   a. ¿Por qué número se puede dividir el 25 sin que sobre nada? Anotá todos los números que encuentres que cumplan esa condición.
   b. ¿Por qué número se puede dividir el 42 sin que sobre nada? Anotá todos los números que encuentres.

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

Un número es divisor de otro cuando, al dividir el segundo por el primero, el resto es 0. Por ejemplo, el 7 es divisor del 42 porque, como 42 = 6 x 7, al hacer 42 : 7 el cociente es 6 y el resto es 0. Con la misma multiplicación, encontramos otro divisor de 42, el 6, porque al hacer 42 : 6 el cociente es 7 y el resto es 0.

10. Escribí 4 múltiplos y 4 divisores de cada uno de los siguientes números:

Número	Múltiplos	Divisores
12		
18		
20		
36		

UN POCO MÁS DIFÍCIL

Analizá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y discutilas con el resto del grado.
- El 1 es divisor de todos los números.
- El 1 es múltiplo de todos los números.
- Para cualquier número, habrá infinitos múltiplos.
- Para cualquier número, habrá infinitos divisores.

43

"Múltiplos y divisores", *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, pp. 41-43)
https://bit.ly/49ok9aC

Posteriormente, se fomenta la identificación de múltiplos comunes mediante situaciones que requieren considerar un mismo reparto equitativo para dos cantidades distintas, prestando atención a que, sin importar la cantidad seleccionada, se requiere asegurar el hecho de que no sobre nada.

Imagen 12. "Múltiplos comunes", *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, p. 45)

Múltiplos comunes

1. Para una reunión entre amigos/as, Mateo preparó una tarta. Quiere dejar las porciones cortadas con anticipación y repartir, más tarde, la misma cantidad entre todos/as los/as que estén.

a. ¿En cuántas porciones debería cortar la tarta Mateo, si no sabe aún si vendrán 4 o 6 amigos/as?

....

....

PARA AYUDAR A RESOLVER

Como se trata de dar a todos/as los/as invitados/as la misma cantidad de porciones, hay que buscar un número de porciones que pueda servir tanto si van 4 como si van 6 personas. Puede pensarse así:

4 × .... = Total de porciones y 6 × .... = Total de porciones

Con este ejemplo de la **actividad 1** de "Múltiplos comunes" (ver **Imagen 12**) se puede retomar la estrategia utilizada en el **punto 2** del apartado "1.3. Problematización de la matemática escolar" del presente documento:

4: 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40, 44, **48**, 52, 56, **60**
6: 6, **12**, 18, **24**, 30, **36**, 42, **48**, 54, **60**

A partir de lo planteado, se puede establecer que **cada 2 veces el 6 se obtiene un múltiplo de 4**, así como que **cada 3 veces el 4 se obtiene un múltiplo de 6**, por lo que se puede concluir que los múltiplos comunes entre 4 y 6 coincidirán cada 12 números (12, 24, 36, 48, 60, ...).

De igual forma, el reconocimiento de que dos o más números pueden tener una gran variedad de múltiplos en común, como se muestra en la **Imagen 13**, se puede trabajar con apoyo del **problema 5** del cuadernillo *Divisibilidad: múltiplos y divisores. Sexto grado* (GCABA, 2019b, p. 15). En este caso, el problema plantea que Dana cuenta de 3 en 3 y Martín, de 5 en 5, y pide encontrar los números en los que ambos coinciden, para luego incluir a Joaco, que cuenta de 6 en 6, y considerar una vez más los números en los que los tres coinciden, siendo la propuesta de solución como la planteada anteriormente.

3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, **30**, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, **60**
5: 5, 10, 15, 20, 25, **30**, 35, 40, 45, 50, 55, **60**, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95
6: 6, 12, 18, 24, **30**, 36, 42, 48, 54, **60**

Con lo anterior, se contempla que los múltiplos comunes en los que coincidirán 3, 5 y 6 serán cada 30 números.

Imagen 13. “Problema 5”, *Divisibilidad: múltiplos y divisores. Sexto grado* (GCABA, 2019b, p. 15)

Problema 5

a. Dana cuenta de 3 en 3; Martín cuenta de 5 en 5. Escriban tres números en los que coincidan. ¿Hay otros posibles? ¿Cuántos?
b. Luego se agrega Joaco contando de 6 en 6. Escriban tres números en los que coincidan los tres. Expliquen cómo llegaron a las respuestas.

En este cuadernillo, se continúa con el reconocimiento de que dos o más números pueden tener una gran variedad de múltiplos para posteriormente dar paso a la identificación del múltiplo común menor, esto es, reconocer el menor valor numérico de los múltiplos comunes entre dos o más números.

Lo anterior se trabaja mediante actividades en las que se plantea un análisis a partir de la comparación, a través de cuestionamientos como *¿cuántos merenguitos puede ser que tenga Violeta en el paquete?*, *¿hay una sola respuesta posible?*, *¿cuál es la mínima cantidad de merenguitos que puede tener?*, o bien *¿dentro de cuántos días será el próximo encuentro?,* de tal modo que, para dar respuesta al **problema 6** (ver **Imagen 14**) se deberán considerar, en primera instancia, todos los posibles múltiplos para 5 y 7, para posteriormente identificar los múltiplos comunes 35, 70, 105, etc.

5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, **35**, 40, 45, 50, 55, 60, 65, **70**, 75, 80, 85, 90, 95, 100, **105**
7: 7, 14, 21, 28, **35**, 42, 49, 56, 63, **70**, 77, 84, 91, 98, **105**, 112

Del mismo modo, para responder el **inciso b**, será necesario determinar los múltiplos entre el 4 y 6, pero con la condicionante de identificar cuál sería la mínima cantidad de merenguitos que Pablo podría tener y repartir en bolsitas sin que sobre ninguna.

4: 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40, 44, **48**, 52, 56, **60**
6: 6, **12**, 18, **24**, 30, **36**, 42, **48**, 54, **60**

Imagen 14. “Problema 6”, *Divisibilidad: múltiplos y divisores, Sexto grado* (GCABA, 2019b, p. 15)

Problema 6

a. Violeta tiene un paquete de merenguitos. Los quiere repartir en bolsitas de manera que todos tengan la misma cantidad. Si pone 5 merenguitos, no le sobra ninguno. Si pone 7, tampoco.
- ¿Cuántos merenguitos puede ser que tenga Violeta en el paquete?
- ¿Hay una sola respuesta posible? Expliquen cómo se dieron cuenta.

b. Pablo también tiene merenguitos para armar bolsitas que tengan la misma cantidad. Si pone 4, no sobra ninguno. Si pone 6, tampoco.
- ¿Cuántos merenguitos puede ser que tenga Pablo?
- ¿Cuál es la mínima cantidad de merenguitos que puede tener?

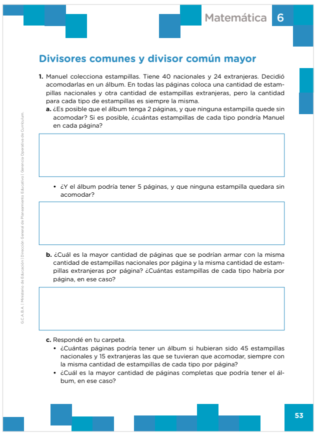
Lo anterior también se refuerza en *Estudiar y aprender en Sexto*, como se muestra a continuación.

Imagen 15. “Múltiplo común menor”, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, p. 50)

Múltiplo común menor

1. Bautista va a la verdulería cada 4 días y su amiga Paula va cada 6 días a la misma hora que él. Si hoy se encontraron, ¿dentro de cuántos días será el próximo encuentro? Anotá en el recuadro todo lo que necesites para responder.

También se trabaja con divisores comunes y divisor común mayor, partiendo del análisis de que dos o más números pueden ser divididos de manera exacta, es decir, sin que haya resto, por un mismo número. Para ello, se requiere del empleo de preguntas que permitan, en primera instancia, analizar las distintas posibilidades de dividir cierta cantidad sin que sobre nada, y en segunda instancia, preguntas en las que, una vez que se determinaron los posibles divisores, se requiera identificar el número más grande con el que se pueda dividir de manera exacta a todas las cantidades (GCABA, 2023e, p. 53).



“Divisores comunes y divisor común mayor”, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, p. 53)
https://bit.ly/3T8ysdy

Con la finalidad de determinar a todos los divisores de un número, se puede optar por la descomposición, como se plantea en el apartado “Para ayudar a resolver”.

Imagen 16. “Multiplicaciones «dentro» de un número”, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, p. 56)

Multiplicaciones “dentro” de un número

1. En la calculadora de Mariano funcionan únicamente las teclas: 2, 5, × e =. ¿Cuáles de los siguientes productos podrían averiguarse con esa calculadora y cuáles no? Para los que sí, anotá con qué cálculos lo harías. Para los que no se puede, explicá por qué.

PARA RECORDAR

Producto es el resultado de una multiplicación.

PARA AYUDAR A RESOLVER

Se trata de buscar si es posible “armar” estos cálculos con multiplicaciones por 2 y por 5. Por ejemplo, si hubiera que hacer 16 × 40, es posible pensar el 16 como 4 × 4 = 2 × 2 × 2 × 2. Y el 40, como 8 × 5 = 2 × 2 × 2 × 5.

Entonces, ese producto se podría averiguar haciendo:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{16} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 5}_{40}$$

En cambio, 16 × 15 no se puede, porque no hay modo de “armar” el 15 usando solo multiplicaciones por 2 o por 5.

Usando como ejemplo el **problema 1** de “Divisores comunes y divisor común mayor” (GCABA, 2023e, p. 53), una posible solución podría iniciar con la descomposición del número en factores que den como resultado él mismo, retomando la idea de que los factores de una multiplicación son divisores exactos. Por ejemplo:

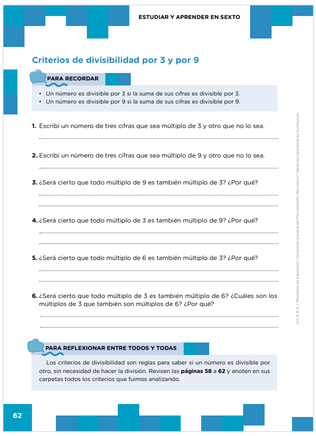
$40 = 20 \times 2$		$24 = 12 \times 2$
$40 = 10 \times 4$	O bien,	$24 = 6 \times 4$
$40 = 10 \times 2 \times 2$		$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$
$40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2$		$24 = 3 \times 8$
$40 = 5 \times 8$		

Una vez identificados todos los divisores, considerando al 1 y al mismo número, se puede ubicar también el divisor común mayor, como el divisor con el valor más grande en el que los dos números coinciden.

40: **1**, **2**, **4**, 5, **8**, 10, 20, 40   24: **1**, **2**, **4**, 6, **8**, 12, 24

Finalmente, se espera que las y los estudiantes sean capaces de inferir y emplear las relaciones operativas alrededor de los criterios de divisibilidad con la finalidad de identificar de manera más ágil si un número podrá ser dividido por otro sin recurrir a la descomposición en factores, por ejemplo, en el caso del criterio de divisibilidad de la tabla de multiplicar del 9 (GCABA, 2023e, p. 62), que podría abordarse desde:

1. Un número será divisible entre 9 si la suma de sus dígitos es igual a 9 o múltiplo de 9.
2. Dado que 9 = 3 × 3, se puede afirmar que cada tercer múltiplo en la tabla del 3 será divisible entre 9.


ESTUDIAR Y APRENDER EN SEXTO

Criterios de divisibilidad por 3 y por 9

PARA RECORDAR

- Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.
- Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 9.

1. Escribí un número de tres cifras que sea múltiplo de 3 y otro que no lo sea.
2. Escribí un número de tres cifras que sea múltiplo de 9 y otro que no lo sea.
3. ¿Será cierto que todo múltiplo de 9 es también múltiplo de 3? ¿Por qué?
4. ¿Será cierto que todo múltiplo de 3 es también múltiplo de 9? ¿Por qué?
5. ¿Será cierto que todo múltiplo de 6 es también múltiplo de 3? ¿Por qué?
6. ¿Será cierto que todo múltiplo de 3 es también múltiplo de 6? ¿Cuáles son los múltiplos de 3 que también son múltiplos de 6? ¿Por qué?

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

Los criterios de divisibilidad son reglas para saber si un número es divisible por otro, sin necesidad de hacer la división. Revisen las **páginas 58** a **62** y anoten en sus carpetas todos los criterios que fuimos analizando.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

62

“Criterios de divisibilidad por 3 y por 9”, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, p. 62)
https://bit.ly/3SWkAIA

7.° grado

Objetivo: análisis de las relaciones múltiplos-divisores y multiplicación-división al modificar las escrituras iniciales en otras más convenientes.

Se inicia 7.° grado con el análisis de múltiplos y divisores en su forma operativa para estudiar la descomposición multiplicativa de un número de manera que se reescriban las operaciones en otras más convenientes, con el objetivo de anticipar si un número podrá ser múltiplo o divisor de otro.

En particular, se trabaja en la exploración e identificación de diversas posibilidades para el desarrollo de una operación a partir del cuestionamiento de la posibilidad de realizar ciertos cálculos usando multiplicaciones con números específicos. Por ejemplo, en el **problema 3** del cuadernillo *Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Séptimo grado* (**Imagen 17**), se pide identificar si es posible determinar más de una forma distinta de llevar a cabo el cálculo de la multiplicación 24 x 12 a partir de la condición de que en la calculadora solo pueden usarse números de una sola cifra para cada factor, siendo así que se puede obtener:

$$24 \times 12$$
$$24 = 6 \times 4, \text{ o bien } 24 = 3 \times 8$$
$$12 = 3 \times 4, \text{ o bien } 12 = 2 \times 6$$

Imagen 17. "Problema 3", *Divisibilidad: de las operaciones a la construcción de anticipaciones. Séptimo grado* (GCABA, 2018a, p. 13)

Problema 3

Si ahora en la calculadora solo pueden usarse números de una cifra para cada factor, decidan cómo podrían resolverse las siguientes multiplicaciones. Además, identifiquen si es posible encontrar más de una multiplicación diferente para cada una de las propuestas.

24 x 12 72 x 48 144 x 24 27 x 15

Imagen 18. "Múltiplos y divisores en cálculos", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, p. 34)

3. ¿Cuáles de los siguientes cálculos pueden realizarse usando solo multiplicaciones por 3, solo multiplicaciones por 2 o multiplicaciones solo por 3 y por 2?

a. 24 x 18 ....
b. 81 x 27 ....
c. 14 x 21 ....
d. 32 x 54 ....
e. 60 x 22 ....
f. 32 x 64 ....

Con lo anterior, se puede enfatizar que a partir del análisis de descomponer un cálculo en factores más convenientes se permite:

1. Determinar otras multiplicaciones que den el mismo resultado:

$$24 \times 12 = 3 \times 8 \times 2 \times 6$$
$$= 18 \times 16$$

2. Identificar divisores del resultado de la operación sin hacer ninguna cuenta:

$$3 \times 8 \times 2 \times 6 = 288, \text{ entonces } 3, 8, 2 \text{ y } 6 \text{ son divisores de } 288$$

Lo anterior permite que se analice la relación múltiplo-divisor, así como la relación multiplicación-división, al ir generando equivalencias entre las distintas combinaciones de operaciones que dan como resultado el mismo número.

Posteriormente, mediante cuestionamientos como *¿es posible determinar, para cada número, más de una descomposición en factores primos?*, se pretende enfatizar:

- El reconocimiento de que todo número compuesto puede pensarse por "multiplicaciones" de:
  - Factores con números compuestos y primos. Ejemplo: $45 = 9 \times 5$.
  - Factores con números primos. En este caso, la descomposición es única. Ejemplo: $45 = 3 \times 3 \times 5$.
- La identificación del desarrollo de operaciones multiplicativas con la estrategia de la descomposición. Así, para obtener el mismo resultado de una multiplicación se requiere tener los mismos factores primos en la descomposición. Ejemplo:

$$\begin{aligned} 12 \times 15 &= 4 \times 3 \times 5 \times 3 \\ &= 4 \times 5 \times 3 \times 3 \\ &= 20 \times 9 \\ &= 180 \end{aligned}$$

Imagen 19. "Problema 7", *Divisibilidad: de las operaciones a la construcción de anticipaciones. Séptimo grado* (GCABA, 2018a, p. 14)

Problema 7

A partir de descomponer los siguientes números en sus factores primos, encuentren todos sus divisores:

a. 28 **b.** 60 **c.** 42 **d.** 32

Imagen 20. "Múltiplos y divisores en cálculos", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, p. 34)

5. Sabiendo que 630 = 5 x 7 x 3 x 3 x 2, escribí tres números de dos cifras que sean divisores de 630.

....

Para finalizar, se sugiere retomar el trabajo sobre los criterios de divisibilidad de *Estudiar y aprender en Sexto* (pp. 58-62) con la intención de facilitar la generación de operaciones más convenientes y atender el objetivo curricular específico de este grado. Lo anterior aporta a un acercamiento a la relación entre multiplicación y división al agilizar la identificación de si un número es divisor de otro o si un número es múltiplo de otro.

1.º año

Objetivo: emplear la relación multiplicación-división para identificar el orden de las operaciones al modificar las estructuras iniciales en otras más convenientes.

El primer año inicia en la consolidación de la descomposición multiplicativa de los factores de una multiplicación a partir de la resolución de multiplicaciones bajo condiciones específicas, como no emplear un número en concreto o identificar si una igualdad de operaciones es falsa o verdadera.

Imagen 21. "Propiedades de la multiplicación y el cálculo mental", *Estudiar y aprender. 1.° año. Tomo 1* (GCABA, 2021a, p. 10)

Actividad 1

¿Cómo podrías resolver estas multiplicaciones con una calculadora, sin usar la tecla del 8?

$39 \times 8 =$ $124 \times 80 =$ $27 \times 18 =$ $1.800 \times 23 =$

Imagen 22. "Propiedades de la multiplicación y el cálculo mental", *Estudiar y aprender. 1.° año. Tomo 1* (GCABA, 2021a, p. 11)

Actividad 3

Sin hacer las cuentas, indicá si cada una de las siguientes igualdades es verdadera o falsa y explicá cómo te das cuenta.

a. 8 × 9 = 8 × 3 × 3
b. 9 × 9 = 9 × 2 × 3
c. 9 × 6 = 9 × 2 × 3
d. 5 × 10 = 5 × 5 × 5
e. 5 × 9 = 5 × 10 – 5
f. 7 x 5 + 7 x 3 = 7 x 8
g. 3 × 9 = 3 × 5 + 3 × 4
h. 16 × 11 = 16 × 9 + 16 × 2

A partir de la solución de la descomposición y el reordenamiento de los números y factores de la multiplicación, se pretende vincular dicho proceder con las tres propiedades de la multiplicación, como se hace hincapié en el apartado "Para recordar" (**Imagen 23**).

Imagen 23. "Para recordar", *Estudiar y aprender. 1.° año. Tomo 1* (GCABA, 2021a, p. 11)

Para recordar

Como vimos en las actividades anteriores, es posible descomponer y reordenar los factores que intervienen en una multiplicación, para convertir algunas cuentas en otras más fáciles de resolver. Estas formas de transformar las multiplicaciones sin afectar el resultado se relacionan con las propiedades con las que cumple la multiplicación de números naturales.

- **Propiedad conmutativa:** si se cambia el orden de los factores, el producto no cambia.

  Por ejemplo: 4 × 25 = 25 × 4

- **Propiedad asociativa:** si se descompone en productos uno o todos los factores de una multiplicación, o se agrupan de diferentes maneras, el resultado no cambia.

  Por ejemplo: 4 × 25 = 4 × 5 × 5 = 20 × 5 = 100

- **Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta:** si se descompone alguno de los factores en una suma o una resta, se multiplican por separado cada uno de los términos y, luego, se suman o se restan (según corresponda) los resultados.

  Por ejemplo: 5 × 8 = 5 × 2 + 5 × 6 (porque 2 + 6 = 8)

Lo anterior da pie al análisis del orden de las operaciones. Tal es el caso de la actividad "Problemas para resolver con varios cálculos" (**Imagen 24**). La situación inicial permite reconocer que Malena debe relacionar las variables *precio* y *cantidad* para determinar cuánto dinero gastó, obteniendo:

Gasto por cajas de ravioles: 40 × 90 = 3.600
Gasto por latas de salsa: 15 × 60 = 900

Posteriormente, se hace el cuestionamiento sobre si es posible escribir el cálculo que Malena necesita para resolver el problema de manera "horizontal":

40 × 90 + 15 × 60 =

Imagen 24. "Problemas para resolver con varios cálculos", *Estudiar y aprender. 1.° año. Tomo 1* (GCABA, 2021a, p. 12)

Problemas para resolver con varios cálculos

Te proponemos trabajar con problemas y con cálculos que incluyen varias operaciones. También vas a estudiar las reglas que hay que tener en cuenta para decidir en qué orden se deben resolver las operaciones y para qué se usan los paréntesis.

Actividad 1

Malena hace las compras para un comedor comunitario. Ayer compró 40 cajas de ravioles a $90 cada caja y 15 latas de salsa a $60 cada lata.

a. ¿Cuánto dinero gastó?
b. ¿Podés escribir un solo cálculo horizontal que permita resolver este problema?

Actividad 2

Andrés resolvió el problema anterior y quiso controlarlo usando una calculadora común. Escribió un cálculo y lo ingresó completo, marcando estas teclas.

Para tener en cuenta
La calculadora que trae el celular funciona como una calculadora científica.

4 0 × 9 0 + 1 5 × 6 0 =

a. Si tenés una calculadora común, probá cuánto da ese cálculo al apretar el signo igual.
b. Probá cuánto te da usando una calculadora científica (puede ser la de un celular).

Una vez establecido el cálculo, representado mediante una organización horizontal, se debe analizar por qué al introducir dicha operación, tal cual se muestra, en una calculadora normal y en otra científica el resultado es diferente. Esto se debe a que las calculadoras científicas priorizan las operaciones de multiplicación y división, antes que las aditivas. Así, al tener un cálculo combinado como el siguiente: 7 + 5 × 3, conviene desarrollar en primer lugar la multiplicación 5 por 3 y, en segundo lugar, sumarle 7, resultando: 7 + 5 × 3 = 7 + 5 + 5 + 5 = 22. Esto es distinto al desarrollo que realiza la calculadora normal (no científica) al no priorizar dichas relaciones: 7 + 5 × 3 = 12 × 3 = 36.

Con lo anterior, se puede concluir con la convención que se menciona en el apartado "Para recordar" (**Imagen 25**), en el que se invita al análisis del orden de resolución en operaciones combinadas, a saber: primero se requiere desarrollar las multiplicaciones y divisiones, y luego las sumas y restas, salvo que se presenten paréntesis que indiquen otro orden.

Imagen 25. “Para recordar”, *Estudiar y aprender. 1.° año. Tomo 1* (GCABA, 2021a, p. 13)

Para recordar

Un cálculo con varias operaciones podría interpretarse de diferentes maneras y dar entonces resultados distintos. Para que eso no ocurra, hay una convención establecida para que las cuentas incluidas en un cálculo se deban hacer en un orden específico.

Esta regla indica que primero deben resolverse las multiplicaciones y las divisiones, y luego las sumas y las restas, salvo que haya paréntesis que indiquen otro orden. Las operaciones incluidas entre los paréntesis se deben resolver primero.

Por ejemplo, para resolver el cálculo

$$4 + 5 \times 6 =$$

Se resuelve primero la multiplicación y luego la suma.

$$4 + 30 = 34$$

Y para resolver este cálculo:

$$(4 + 5) \times 6 =$$

Hay que tener en cuenta que el paréntesis indica que primero hay que resolver la suma.

$$9 \times 6 = 54$$

Las calculadoras comunes no respetan esta convención, es decir, no separan en términos ya que operan con los números en el orden en que se los ingresa.

En cambio, las calculadoras científicas y las de los celulares operan respetando esta convención.

Se concluye primer año con la resolución de operaciones combinadas. Para ello, se requerirá atender al orden de las operaciones que se van a realizar, esto es, operar a partir de solucionar primero las multiplicaciones y divisiones, antes que las sumas y restas, a menos que haya paréntesis y se deba priorizar otro cálculo (GCABA, 2021a, p. 13).

Actividad 4

Uno solo de estos cálculos da como resultado 900. ¿Cuál es?

$99 - 9 \times 4 + 6 =$ $\quad$ $99 - 9 \times (4 + 6) =$ $\quad$ $(99 - 9) \times (4 + 6) =$

Actividad 5

Resolvé los siguientes cálculos.

a. $(5 + 3) \times 7 - 1 =$

b. $5 + 3 \times 7 - 1 =$

c. $5 + 3 \times (7 - 1) =$

d. $(5 + 3) \times (7 - 1) =$

PDF

“Escribir un cálculo con varias operaciones”, *Estudiar y aprender. 1.° Tomo 1* (GCABA, 2021a, p. 13)
https://bit.ly/3I7bH3g

2.° año

Objetivo: simbolizar las relaciones múltiplos-divisores y multiplicación-división para generalizar en los números naturales y ampliar su estudio a los números enteros.

Para segundo año se requiere de las conceptualizaciones de la multiplicación y la división, así como de múltiplo y divisor con la finalidad de analizar las relaciones de multiplicidad y divisibilidad para sintetizarlas en una expresión algebraica que pueda ser reemplazada por cualquier número natural. Lo anterior pretende que las y los estudiantes sean capaces de argumentar si las relaciones expresadas, generalizando a cualquier número natural, cumplen o no con la condición planteada. Por ejemplo, en la **actividad 5** que se muestra en la **Imagen 26**, se pretende que se reconozca que cualquier número que reemplace a n en la expresión $2 \times n + 1$ será un número impar.

Imagen 26. “Actividad 4” y “Actividad 5”, *Estudiar y aprender. 2.° año. Tomo 1* (GCABA, 2021c, p. 6)

Actividad 4

En la expresión 15 × *n*, la letra *n* puede ser reemplazada por cualquier número natural.

a. Si se reemplaza *n* por 3, ¿es cierto que el resultado obtenido es múltiplo de 9?

....

b. ¿Por qué otros números se puede reemplazar a *n* para que el resultado sea un múltiplo de 9?

....

c. ¿Por qué números se puede reemplazar a *n* para que el resultado sea un múltiplo de 10?

....

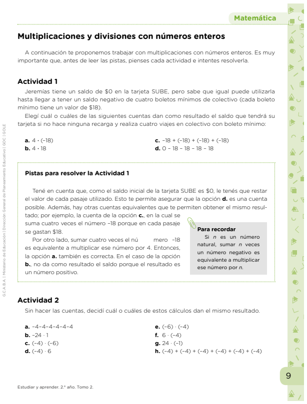
Actividad 5

a. Selena dice que en la expresión 2 × *n* + 1, si reemplaza *n* por cualquier número natural el resultado siempre es un número impar. ¿Estás de acuerdo? Explicá tu respuesta.

....

Dado que conviene desarrollar primero la multiplicación, tal como se analiza en la jerarquía de operaciones tratada en años anteriores, al tener cualquier número *n* multiplicado por 2, el producto de esa multiplicación siempre podrá ser dividido de manera exacta entre 2; sin embargo, al adicionar 1 a dicho número par, el número final resultará impar.

Para finalizar, se amplía el estudio a los números enteros, reconociendo que las propiedades que se han analizado hasta el momento con los números naturales se siguen cumpliendo con los enteros, específicamente, con los números negativos (GCABA, 2021d, p. 9).



Matemática

Multiplicaciones y divisiones con números enteros

A continuación te proponemos trabajar con multiplicaciones con números enteros. Es muy importante que, antes de leer las pistas, pienses cada actividad e intentes resolverla.

Actividad 1

Jeremías tiene un saldo de \$0 en la tarjeta SUBE, pero sabe que igual puede utilizarla hasta llegar a tener un saldo negativo de cuatro boletos mínimos de colectivo (cada boleto mínimo tiene un valor de \$18).

Elegí cuál o cuáles de las siguientes cuentas dan como resultado el saldo que tendrá su tarjeta si no hace ninguna recarga y realiza cuatro viajes en colectivo con boleto mínimo:

a. 4 · (−18)
b. 4 · 18
c. −18 + (−18) + (−18) + (−18)
d. 0 − 18 − 18 − 18 − 18

Pistas para resolver la Actividad 1

Tené en cuenta que, como el saldo inicial de la tarjeta SUBE es \$0, le tenés que restar el valor de cada pasaje utilizado. Esto te permite asegurar que la opción **d.** es una cuenta posible. Además, hay otras cuentas equivalentes que te permiten obtener el mismo resultado; por ejemplo, la cuenta de la opción **c.**, en la cual se suma cuatro veces el número −18 porque en cada pasaje se gastan \$18.

Por otro lado, sumar cuatro veces el número −18 es equivalente a multiplicar ese número por 4. Entonces, la opción **a.** también es correcta. En el caso de la opción **b.**, no da como resultado el saldo porque el resultado es un número positivo.

Para recordar
Si *n* es un número natural, sumar *n* veces un número negativo es equivalente a multiplicar ese número por *n*.

Actividad 2

Sin hacer las cuentas, decidí cuál o cuáles de estos cálculos dan el mismo resultado.

a. −4−4−4−4−4−4
b. −24 · 1
c. (−4) · (−6)
d. (−4) · 6
e. (−6) · (−4)
f. 6 · (−4)
g. 24 · (−1)
h. (−4) + (−4) + (−4) + (−4) + (−4) + (−4)

9

Estudiar y aprender. 2.° año. Tomo 2.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | GOC | GOLE

“Multiplicaciones y divisiones con números enteros”, *Estudiar y aprender. 2.° año. Tomo 2* (GCABA, 2021d, p. 9)
https://bit.ly/3uF82Xz

Para representar el número entero negativo, se recomienda retomar el apartado “De los números naturales a los enteros” de la sección “1.2. Contextualización disciplinar”, en el que se representa al negativo como el opuesto o el inverso aditivo de un número positivo, identificando al número cero como punto de referencia.

Siendo ese el caso, por ejemplo, se recomienda interpretar las operaciones con números negativos mediante el uso de la propiedad asociativa, planteando una equivalencia como $(-2) = (-1) \cdot (2)$, siendo el -1 un número opuesto, y operar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(-2) \cdot (4) &= (-1) \cdot (2) \cdot (4)\\ &= (-1) \cdot (8)\\ &= (-8)\end{aligned}$$

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivo del año escolar	Análisis de procedimientos para identificar múltiplos y divisores comunes entre dos o más números.	Análisis de las relaciones múltiplos-divisores y multiplicación-división al modificar las escrituras iniciales en otras más convenientes.	Emplear la relación multiplicación-división para identificar el orden de las operaciones al modificar las estructuras iniciales en otras más convenientes.	Emplear la relación multiplicación-división para identificar el orden de las operaciones al modificar las estructuras iniciales en otras más convenientes.
Ideas fuerza	• Establecer **relaciones numéricas** mediante el estudio de las cantidades, sus representaciones diversas y la forma de operarlas. • Reconocer patrones de comportamiento de las cantidades y asociarlos a sus representaciones numéricas y/o geométricas. • Representar las relaciones numéricas generales y expresarlas a través de estructuras aritméticas (aditivas o multiplicativas). • Promover la dualidad de significado del signo igual (=) para expresar equivalencia entre expresiones numéricas. • Promover diversas interpretaciones de la noción de múltiplo de un número. • Promover múltiples interpretaciones de la noción de divisor de un número.	• Establecer **relaciones numéricas** mediante el estudio de las cantidades, sus representaciones diversas y la forma de operarlas mediante el establecimiento de una estructura que lo permita. • Usar de forma razonada las operaciones aritméticas (algoritmos con sentido). • Promover la dualidad de significado del signo igual (=) para expresar equivalencia entre expresiones numéricas. • Promover diversas interpretaciones de la noción de múltiplo de un número.	• Promover distintas situaciones en las que se utilizan las relaciones multiplicativas: situaciones de agrupación y repetición o bien de distribución y reparto. • Promover la dualidad de significado del signo igual (=). • Usar de manera razonada las operaciones aritméticas (algoritmos con sentido). • Interpretar la relación multiplicativa. • Interpretar la relación de divisibilidad.	• Representar las relaciones numéricas generales y expresarlas a través de estructuras aritméticas (aditivas o multiplicativas). • Promover la dualidad de significado del signo igual (=). • Interpretar la relación multiplicativa. • Interpretar la relación de divisibilidad. • Promover diversas interpretaciones de la noción de múltiplo de un número. • Promover múltiples interpretaciones de la noción de divisor de un número.
Preguntas clave	• ¿Cómo identificar si un número es múltiplo o divisor de otro número dado? • ¿Cómo determinar un múltiplo o divisor común entre dos o más números?	• ¿Qué información ofrece una escritura (expresión) aritmética (numérica)? • ¿Qué información adicional aporta la reescritura (expresión equivalente) aritmética (numérica)? • ¿Es posible establecer relaciones equivalentes entre números o cantidades sin recurrir a su resolución?	• ¿Cómo determinar el orden más conveniente entre la multiplicación-división y la adición-sustracción para la resolución de operaciones combinadas?	• ¿Cómo comunicar matemáticamente (simbolizar) las relaciones numéricas que implican multiplicidad y divisibilidad, que se cumplen para los números naturales? • ¿Qué se mantiene y qué cambia de las relaciones entre multiplicación y división, y entre múltiplo y divisor al relacionar los enteros positivos con los enteros negativos (números enteros)?

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Materiales propuestos	• *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e) • *Matemática. Divisibilidad: múltiplos y divisores. Sexto grado.* (1.ª edición para el profesor) (GCABA, 2019b)	• *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f) • *Matemática. Divisibilidad: de las operaciones a la construcción de anticipaciones.* (1.ª edición para el profesor) (GCABA, 2018a) • *Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria* (1.ª edición para el alumno) (GCABA, 2023g)	• *Estudiar y aprender. 1.º año. Tomo 1* (1.ª edición para el alumno) (GCABA, 2021a) • *Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria* (GCABA, 2023a y 2023g)	• *Estudiar y aprender. 2.º año. Tomo 1* (GCABA, 2021c) • *Estudiar y aprender. 2.º año. Tomo 2* (GCABA, 2021d)

Capítulo 2. Producción de fórmulas

2.1. Ubicación curricular

El objetivo de este apartado es visibilizar dónde y cómo se presentan los objetivos y alcances curriculares relativos al contenido específico de **producción de fórmulas**. En particular, abordaremos dos componentes principales para mostrar la diversidad en la construcción y el tratamiento de las fórmulas: *expresión de la generalidad*, y *análisis y manipulación de las fórmulas*. Para la revisión, se considerarán diferentes documentos publicados por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Tabla 9. Síntesis de ubicación curricular del contenido de producción de fórmulas

<table>
<tr><th>Unidad de análisis</th><th colspan="2">Primaria</th><th colspan="2">Secundaria</th></tr>
<tr><th>Nivel</th><th>6.°</th><th>7.°</th><th>1.°</th><th>2.°</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetivos curriculares</td><td colspan="2">Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2014) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)</td><td colspan="2">Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico (2ª ed., 2015) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)</td></tr>
<tr><td>Tema: Números naturales y operaciones
• Analizar la equivalencia entre diferentes escrituras multiplicativas y referidas a la división entera; analizar las diferentes informaciones que permiten relevar.
(p. 125)</td><td>Tema: Números naturales y operaciones
• Reconocer y utilizar la relación $D = d \times c + r$, con $r < d$.
(p. 126)</td><td>Eje: Números y álgebra - Números naturales
• Utilizar las propiedades de los números naturales y sus operaciones para leer y producir fórmulas que modelicen situaciones, transformar expresiones en otras equivalentes y obtener nueva información y producir argumentos que den cuenta de la validez de lo realizado.
(p. 514)</td><td>Eje: Números y álgebra - Números naturales. Combinatoria
• Utilizar recursos algebraicos que permitan producir, formular y validar conjeturas referidas a la divisibilidad en el campo de los números enteros.
(p. 521)
• Recurrir a las expresiones algebraicas para analizar las variaciones del área de una figura en función de la variación de alguno de sus elementos.
(p. 521)</td></tr>
<tr><td>Alcances planteados desde la propuesta actual</td><td>• Participar en la elaboración de argumentos que involucren relaciones internas de la multiplicación y la división.
• Analizar la equivalencia entre diferentes escrituras multiplicativas y referidas a la división entera; analizar las diferentes informaciones que permiten relevar.</td><td>• Reconocer y utilizar la relación $D = d \times c + r$, con $r < d$.
• Analizar y utilizar los criterios de divisibilidad para establecer relaciones entre números, entre cálculos y establecer cocientes y restos.</td><td>• Estudiar algunas técnicas necesarias para el trabajo algebraico para representación o escrituras matemáticas.
• Usar expresiones algebraicas para estudiar el funcionamiento de los diferentes campos numéricos y sus operaciones.</td><td>• Las fórmulas serán construidas por los/as estudiantes a partir de la generalización propuesta en un problema.
• Se trata de introducir el álgebra como herramienta para conocer propiedades de las operaciones.
• Avanzar en el trabajo con fórmulas y gráficos, así como estudiar las relaciones entre la variación del gráfico y la variación de la fórmula en términos de corrimientos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Unidad de análisis</th><th>Primaria</th><th>Secundaria</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Estudiar y aprender PUENTE</td><td colspan="2">Números y operaciones en N
2. Propiedades de la multiplicación
La intención es promover la discusión y la explicitación de las razones que subyacen a estas estrategias de cálculo, como también la formulación y la validación de nuevas reglas generales.
3. Propiedades de la división
En esta sección se profundiza el estudio de la división, incorporando el análisis y la generalización de algunas de sus propiedades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proporcionalidad
4. Representaciones gráficas
Problemas que invitan al trabajo con ciertas representaciones gráficas entre variables y su conexión con los modelos proporcionales. Situaciones de proporcionalidad directa e inversa. Esto permite manejar otros registros diferentes, como la tabla de valores y, luego, en el terreno de la escuela secundaria, las fórmulas que modelizan este tipo de relaciones. (GCABA 2023a, p. 13)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Orientaciones para docentes
Algunas propiedades de las escrituras numéricas y de las operaciones entre números naturales podrían resultar relativamente fáciles de usar aritméticamente, pero justificarlas como reglas generales, propias del trabajo algebraico, puede no ser tan evidente. Por ello, es posible que sean un punto de apoyo para la posterior generalización mediante el uso de letras en las expresiones simbólicas, en un trabajo que se oriente hacia la formulación, discusión y validación de estas reglas generales. (GCABA 2023a, p. 16)</td></tr>
</table>

2.2. Contextualización disciplinar

En el ámbito escolar y en los currículos de educación básica y media de muchas partes del mundo, las fórmulas aparecen tanto en las asignaturas relacionadas con el álgebra, como en los ejes de números o geometría. Sin embargo, es necesario mencionar que el concepto de fórmula no es cuestionado o definido ni en la práctica docente, ni en los materiales escritos, ni en los libros de texto (Schou y Bikner-Ahsbahs, 2022). Es decir, se construyen, memorizan, manipulan y usan las fórmulas, pero no se explica qué son. Por lo tanto, gran cantidad de estudiantes experimentan dificultades al trabajarlas. Por ejemplo, eligen las fórmulas equivocadas para una tarea, introducen números erróneos en las fórmulas, no las manipulan correctamente, y las establecen incorrectamente a partir de un contexto dado, entre otras cosas (Kieran, 1992, citado en Schou y Bikner-Ahsbahs, 2022).

En el caso de la propuesta curricular en la que se enmarca este documento, la generalización es considerada una vía pertinente para el primer acercamiento al álgebra. Este hecho implica dos consideraciones sustantivas que involucran lo algebraico, y que serán consideradas en esta propuesta: la **producción de fórmulas** para contar colecciones y la **formulación y validación** de conjeturas sobre los números y las operaciones.

2.2.1. ¿Qué es una fórmula?

En el desarrollo conceptual del álgebra, François Viète y René Descartes fueron dos personajes ampliamente conocidos que impulsaron un cambio fundamental: la algebrización de la matemática. Se propone analizar la siguiente cuestión: ¿ambas expresiones podrían considerarse fórmulas?

a) $x^6 + 36 = 20x^3$ **b)** $x^3 + 3zx = q$

Una mirada superficial llevaría a considerar que ambas expresiones tienen la misma naturaleza, puesto que las dos podrían considerarse ecuaciones por su estructura, es decir, ambas tienen un signo igual, números e incógnitas. No obstante, si bien visualmente la estructura es similar, la naturaleza de cada uno de los objetos representados es distinta. Por ejemplo, la expresión *a* contiene coeficientes numéricos específicos para la incógnita x (1 y 20), así como una constante (36). La expresión *b* también contiene coeficientes específicos para la incógnita x (1 y 3), pero aparecen otras dos cantidades (z y q), que no especifican su valor numérico. Es más, ¿cómo saber que z y q no son incógnitas también?

Fueron este tipo de cantidades z y q y las ecuaciones que las involucran lo que cambió el curso de los descubrimientos matemáticos durante el siglo XVII. Las fórmulas matemáticas son objetos que han encontrado su lugar en el aparato matemático y que implicaron un avance vertiginoso de la ciencia. Gracias a las invenciones de Viète y Descartes, las matemáticas se algebrizaron de manera importante, permitiendo ese desarrollo (Massa-Esteve, 2006). Fue la aparición de las fórmulas lo que permitió esta algebrización. La razón de este avance se debe a que estas cantidades fueron manipuladas como si se conocieran sus valores numéricos específicos para descubrir estructuras subyacentes en las expresiones. En el caso de las dos cantidades z y q del ejemplo, llamadas *parámetros*, representaban longitudes geométricas de un par de triángulos (López-Acosta, 2023). Con la aparición de las **fórmulas matemáticas** se empezaron a comprender mejor las propiedades de las relaciones matemáticas que se investigaban, puesto que con estas se buscaba conocer de manera general cómo se comportan todas las posibles soluciones a un problema, o bien todas las curvas que podrían representarse con cualquier cambio en los valores de estos parámetros.

Esta propiedad es una de las más importantes entre las que se proponen en los documentos curriculares. Por ejemplo, en GCABA (2001) se señala:

> Efectivamente, *las propiedades acerca de los números, las figuras o los cuerpos no "residen" en estos objetos esperando ser "descubiertas" por los niños; son el producto de una construcción intelectual y los alumnos deben tener la oportunidad de enfrentar los problemas que hagan observables esas propiedades como producto de su propia acción intelectual sobre los objetos con los que están tratando* [énfasis agregado]. (...) La función que cumple el ejemplo en la producción de una ley general depende entonces de la actividad realizada alrededor del mismo. (GCABA, 2001, pp. 67 y 68)

Como dice el texto citado, las propiedades (de los números, las figuras o los cuerpos) dependen de la actividad intelectual y es importante aclarar que dicha actividad se da en la interacción con los sistemas de símbolos matemáticos (expresiones algebraicas, imágenes o lenguaje natural).

Por lo tanto, podemos afirmar que **las fórmulas matemáticas son expresiones que involucran una relación de equivalencia entre términos definidos por constantes** (coeficientes específicos como 1, ¾, π), **variables** (cantidades que cambian conforme a las distintas condiciones y variaciones del problema) **y parámetros** (cantidades que determinan condiciones específicas en las relaciones que delimitan familias de soluciones).

Entonces, es importante destacar que **no todas las expresiones algebraicas son fórmulas**, sino solo aquellas que denotan una **relación de equivalencia** entre **constantes**, **variables** y **parámetros**, pues su función es la de representar todas las posibles soluciones a un problema (familia de soluciones), o bien todos los posibles objetos matemáticos que se desea estudiar (familia de curvas, funciones, etc.) para conocer el comportamiento general de aquello que representan.

Dicho lo anterior:

> Una fórmula consta entonces de dos términos con al menos una variable unida por un signo '='. Expresa una identidad contextual en la que algunos símbolos algebraicos se refieren a medidas de un objeto geométrico que pueden ser fijas o cambiantes y conocidas o desconocidas. (Schou y Bikner-Ahsbahs, 2022, p. 642)

En este sentido, las fórmulas, como objetos algebraicos, resultan ser generalizaciones de familias de soluciones, de objetos geométricos, o bien de funciones que representan identidades de distinta naturaleza basadas en el contexto del cual provienen (ver **Tabla 10**). La formación académica de las y los estudiantes a lo largo de su trayectoria escolar los conducirá al trabajo con estos distintos tipos de objetos generalizados mediante las fórmulas. En lo que corresponde a los niveles educativos de esta propuesta, las fórmulas matemáticas estarán asociadas a expresiones algebraicas que generalizan relaciones aritméticas y geométricas básicas.

Tabla 10. Distintos tipos de relaciones de equivalencia y objetos generalizados por las fórmulas

Familia de soluciones	Familia de objetos geométricos	Familia de funciones
$A = (1/2) \cdot b \cdot h$	$Ax + By + C = 0$	$y = a(x - b)^2 + c$
Identidad contextual. Los distintos valores del área que pudieran obtenerse, dependiendo de los distintos triángulos que se pudieran formar dadas las medidas variables *b* y *h*.	*Identidad contextual*. Los objetos geométricos que cumplen la condición de que la suma del valor del parámetro C con los productos *Ax* (valor del parámetro *A* por el valor de la variable *x*) y *By* (valor del parámetro *B* por el valor de la variable *y*) sea 0.	*Identidad contextual*. Las variaciones en los parámetros *a*, *b* y *c* determinan funciones cuadráticas específicas.

2.2.2. Consideraciones generales con el trabajo de fórmulas

Como objetos algebraicos, las fórmulas conllevan la carga de las dificultades más conocidas del aprendizaje del álgebra, particularmente, las referidas a la capacidad de asignar significados a cada uno de los elementos de las fórmulas y también respecto de la concepción del signo *igual*. Como se menciona en el documento *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática*, el ingreso al álgebra implica una relación de filiación y de ruptura con lo aprendido en aritmética.

> La entrada al mundo algebraico implica rechazar muchos significados y prácticas elaboradas a lo largo de toda la vida escolar. Se trata de desarrollar nuevas estrategias, que son muy diferentes a las utilizadas en el trabajo aritmético. Se produce así un conflicto y una ruptura: por un lado, es necesario renunciar a esas prácticas, pero, por el otro, hay que basarse en ellas. (GCABA, 2019a, p. 23)

Se produce la filiación por el hecho de que muchas relaciones aritméticas y geométricas pueden generalizarse en álgebra, por ejemplo, que $a(b + c) = ab + bc$. Pero existe una ruptura importante con el significado de los signos empleados. Por ejemplo, en el caso de las relaciones propuestas en la **Tabla 11**, hay dos diferencias entre la expresión $A = (1/2) \cdot b \cdot h$ y la expresión $Ax + By + C = 0$.

Tabla 11. Distintos tipos de significados del signo *igual*

Significado operacional del signo *igual*	Significado estructural del signo *igual*
$A = (1/2) \cdot b \cdot h$	$Ax + By + C = 0$
El signo *igual* se emplea de manera muy similar al contexto aritmético. Al sustituir los valores de *b* y *h* se obtiene un valor que se le atribuye a la variable *A*, es decir, el resultado de dichas operaciones.	El signo *igual* representa una condición entre los dos términos de la fórmula, es decir, una relación de asignación que vincula al conjunto de operaciones con una identidad, es decir, $Ax + By + C$ tiene que ser 0 para que cumpla con ser un objeto geométrico muy específico: una recta.

2.2.3. Sentido simbólico

El trabajo con fórmulas implica una transición de un tipo de pensamiento operacional a otro estructural. Para ello, es importante desarrollar un sentido simbólico, que implica, entre otros aspectos, los siguientes (Arcavi, 1994):

- Capacidad de explorar una expresión algebraica para hacer estimaciones aproximadas de los patrones que surgirían en una representación numérica o gráfica.
- Capacidad para explorar una tabla de valores de funciones o un gráfico o para interpretar condiciones enunciadas verbalmente, para identificar la forma probable de una regla algebraica que exprese el patrón apropiado.
- Capacidad para inspeccionar operaciones algebraicas y predecir la forma del resultado (...).
- La capacidad de manipular y de "leer" expresiones simbólicas como dos aspectos complementarios de la resolución de problemas algebraicos.
- La conciencia de que se pueden elaborar con éxito relaciones simbólicas que expresen la información verbal o gráfica necesaria para avanzar en un problema y la capacidad de elaborar esas expresiones.
- Darse cuenta de la necesidad constante de comprobar los significados de los símbolos al resolver un problema, y de comparar y contrastar esos significados con las propias intuiciones o con el resultado esperado de ese problema.
- Percibir las distintas funciones que pueden desempeñar los símbolos en diferentes contextos. (pp. 24-31)

De estas recomendaciones hay que destacar, entonces, que el cambio de un significado operacional a uno estructural implica el reconocimiento de estas diferencias entre los tipos de expresiones que involucran el signo *igual*. Otra clasificación sobre el uso del signo *igual* es la de Parodi (2016), en la cual se enlistan sus usos en términos aritméticos y algebraicos (**Tabla 12**).

Tabla 12. Distintos usos aritméticos y algebraicos del signo *igual* (adaptado de Parodi, 2016)

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Significados del signo de igual</th><th colspan="2">Ejemplos</th></tr>
<tr><th>Aritméticos</th><th>Algebraicos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Propuesta de actividad</td><td>$16 : 3 =$</td><td>$x(x + 1) - 3x(x + 5) =$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operador</td><td>$4 \times 5 = 20$</td><td>$x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una acción</td><td>$24 = 12 + 12$</td><td>$2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Separador</td><td>(No corresponde)</td><td>$f(x) = x^2 = f^2(x) = x^4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una equivalencia condicional</td><td>(No corresponde)</td><td>$x^2 + 4x = 5x - 6$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Expresión de una equivalencia</td><td>Equivalencia numérica</td><td>$4 + 5 = 3 + 6$
$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$</td><td>(No corresponde)</td></tr>
<tr><td>Equivalencia simbólica</td><td>(No corresponde)</td><td>$x^2 + 2x = x(x - 2)$
$a + b = b + a$</td></tr>
<tr><td>Identidad estricta</td><td>$3 = 3$</td><td>$x + 5 = x + 5$</td></tr>
<tr><td>Equivalencia por definición o por notación</td><td>$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$</td><td>$a/b = ab^{-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición de un objeto matemático</td><td>$1^0 = 1$</td><td>$f(x) = 2x + 3$
$a^{\circ} = 1, a \neq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una relación funcional o de dependencia.</td><td>(No corresponde)</td><td>$l = 2\pi r$
$y = 3x + 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Indicador de cierta conexión o correspondencia</td><td>Precio bici = $50</td><td>Precio bici = $3x + 5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aproximación</td><td>$\frac{1}{3} = 0{,}33$</td><td>(No corresponde)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asignación de un valor numérico</td><td>(No corresponde)</td><td>$x = 4$</td></tr>
</table>

2.2.4. Fórmulas y procesos de generalización

La construcción del significado de las expresiones algebraicas depende principalmente de los procesos, objetos y estrategias que permiten determinarlas, es decir, de qué se generaliza, cómo, en qué contexto y a partir de qué estrategias. En el nivel primario y la transición al nivel secundario, es importante generar procesos de generalización, los cuales se sustentan en la idea de transitar del pensamiento aritmético hacia algunos conceptos algebraicos a través de la construcción de fórmulas. Para ello, es fundamental conceptualizar la variable, aspecto que requiere de un proceso progresivo y de larga duración que puede abordarse a partir de situaciones en las que se debe percibir y expresar lo general. Esto precisa de la conjunción de dos procesos. (Serres, 2007)

1. **Generalización**. Pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto en común a todas ellas, es decir, ser capaz de distinguir lo común entre un conjunto de elementos que cambia de acuerdo con alguna regularidad.
2. **Simbolización**. Expresar sintéticamente y con el uso de símbolos aquello común a todas las situaciones.

El proceso de generalización, a su vez, contempla tres fases.

a. **La visión de la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes**. Implica el análisis de los elementos identificados en las distintas situaciones para encontrar hipótesis sobre el comportamiento.
b. **Exposición verbal**. Implica generar un discurso oral que dé cuenta de las regularidades identificadas. Es fundamental construir, mediante el lenguaje, explicaciones sobre lo observado, puesto que permite identificar qué observan las y los estudiantes, así como los elementos que comienzan a abstraerse.
c. **Expresión escrita**, de la manera más concisa posible. Traducir el discurso oral a un discurso escrito que permita ser inteligible para distintas personas.

2.2.5. Sobre las actividades de generalización

En términos generales existen recomendaciones para el trabajo con situaciones de generalización. La primera es que las situaciones deben percibirse como matemáticas, es decir, deben promover el análisis de elementos que cambien o permanezcan invariables, con la intención de percibir posibles diferencias y similitudes (Rivera, 2013). Este análisis debe sustentarse en un proceso inductivo, es decir, que la generalización se sustente en el análisis de distintos casos particulares para detectar la comunalidad subyacente a todos los casos.

En segundo lugar, las y los estudiantes, especialmente de primaria y secundaria, necesitan adquirir la práctica matemática de predecir comportamientos, basada en el reconocimiento de pocas etapas conocidas y que, posteriormente, la conjetura construida pueda proyectarse sobre etapas desconocidas y lejanas del patrón (Rivera, 2013).

Otro elemento importante es el hecho de que los patrones deben permitir la construcción de distintas fórmulas equivalentes para recuperar la mayor cantidad de posibles percepciones de las y los estudiantes y, con ello, permitir que estos atribuyan sentidos y significados personales.

Además, los patrones deben poder analizarse desde una perspectiva numérica y figural o visual para promover una relación entre ambos tipos de pensamiento. Algunos ejemplos de patrones podrían ser los siguientes.

Tabla 13. Algunos tipos de patrones (adaptado de Rivera, 2013, p. 9)

Tipos de patrones	**Ejemplos**
Constantes	A A A A A A ...
Oscilatorios y repetitivos	A B A B A B ...
Crecientes	1, 3, 5, 7, 9, 11 Números figurativos.
Decrecientes	12, 10, 8, 6, 4, ...
Algoritmos matemáticos	Algoritmo de la división, de la multiplicación.
Conceptos matemáticos	Descomposición de cantidades.
Recursivos	Sucesión de Fibonacci, Torre de Hanoi, etc.
De dibujos espaciales	Algunas relaciones geométricas (fractales, teorema de Pitágoras, suma de los ángulos internos en un triángulo).

Veamos algunos ejemplos para abordar estas ideas de manera más concreta.

Ejemplo 1. Determiná el comportamiento de los rombos con respecto al número de figura para calcular la cantidad de rombos de la figura 15 (López-Acosta, 2016).

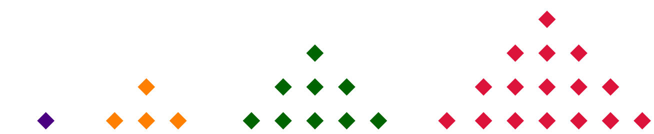


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

En el caso del ejemplo es necesario reconocer que la cantidad de rombos aumenta con respecto a cada una de las figuras anteriores y que la forma en la que aumenta cada una de las formas triangulares consiste en agregar una fila debajo de un caso a otro (una posible explicación verbal). Se requiere reconocer aquello que **permanece invariante** en todo el proceso de cambio. La determinación de esta regularidad en el cambio es precisamente lo que permite realizar predicciones de estados futuros.

En esta fase, la intención fundamental residirá en identificar aquello que permanecerá invariante en las relaciones que se observan o abstraen. Para esta fase se podrá recurrir a más de una forma de identificar las regularidades. A continuación, se muestran tres ejemplos de estrategias.

Estrategia 1. El cuadrado del número. Esta estrategia se puede definir si se establecen representaciones mentales o escritas que abstraen la información visual y la convierten a un registro numérico. Por ejemplo, puede construirse la siguiente correspondencia:

Caso 1 → 1
Caso 2 → 4
Caso 3 → 9
Caso 4 → 16
Caso 5 → 25

Estrategia 2. Pirámide de números impares. Es posible reconocer en la configuración que se van agregando cantidades impares en cada una de las figuras. Por lo tanto, conforme el número de figura aumenta, se agrega un número impar más a la suma. De este modo se puede conjeturar que la sucesión de imágenes tiene que ver con la suma de números impares y su patrón de comportamiento al sumarlos.

$$\textit{Caso } 1 \rightarrow 1$$
$$\textit{Caso } 2 \rightarrow 1 + 3$$
$$\textit{Caso } 3 \rightarrow 1 + 3 + 5$$
$$\textit{Caso } 4 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7$$
$$\textit{Caso } 5 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Estrategia 3. Diferencias. Puede notarse también que las diferencias entre cada uno de los valores de la segunda columna aumentan bajo una regularidad, es decir, de dos en dos. Así, abstrayendo los valores de los rombos para cada número de figura se puede generar una tabla en la que se calculen las primeras y segundas diferencias (esto se estima para años escolares avanzados).

Tabla 14. Tabla en la que se recurre a las diferencias entre cada caso (López-Acosta, 2016)

Figura	Cantidad de rombos	Primera diferencia	Segunda diferencia
1	1		
2	4	3	
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2

Cada una de estas estrategias muestra maneras distintas de identificar la regularidad. Por ejemplo, en las estrategias 1 y 2 se reconoce que tanto la correspondencia numérica como una reconfiguración de los elementos de la secuencia dejan ver que las cantidades de rombos corresponden a los cuadrados correspondientes al número de caso. Para la estrategia 3, la regularidad se identifica con la segunda diferencia. Esta es siempre 2. De esta manera al momento de predecir la cantidad de rombos que tendrá cierta figura, se generan ideas que aluden a las relaciones invariantes entre los elementos que se observaron. En este proceso conviene realizar pruebas para validar las conjeturas.

Para la estrategia 1, cada una de las relaciones entre el número de figura y la cantidad de rombos corresponde al cuadrado del número de figura. Por lo tanto, bastaría con elevar al cuadrado el número de figura para obtener la cantidad de rombos de esa figura. En el caso de 15, se tendría que la cantidad total de rombos en esta figura sería de $15^2 = 225$.

Para la estrategia 2, se pueden agregar los siguientes números impares al caso previo para obtener la cantidad de rombos de la figura:

$1 \rightarrow 1$	1
$2 \rightarrow 1 + 3$	4
$3 \rightarrow 1 + 3 + 5$	9
$4 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7$	16
$5 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9$	25
...	...
$15 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + 2(15) - 1$	225

Con la estrategia 3 se puede llenar la tabla considerando que el valor de la columna de primera diferencia se obtiene al sumar 2 a la diferencia previa y que la cantidad de rombos se obtiene al sumar el valor anterior con la cantidad de rombos previa.

Tabla 15. Relación entre la cantidad de objetos en cada figura y las diferencias de la cantidad de objetos entre una figura y otra (López-Acosta, 2016)

Figura	Cantidad de rombos	Primera diferencia
1	1	
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	25 + 11 = 36	9 + 2 = 11
7	36 + 13 = 49	11 + 2 = 13
...	...	...
15	196 + 29, ya que 49 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29	

Ejemplo 2. Observá la siguiente secuencia de imágenes y determiná cuántos objetos tendrá el caso 50 (López-Acosta, 2016).

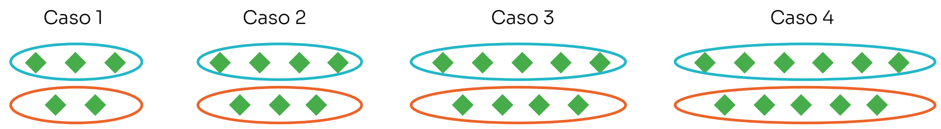
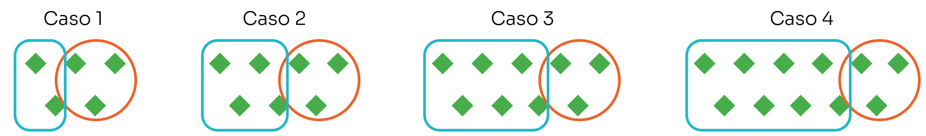
Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
◆ ◆ ◆ ◆ ◆	◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆	◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆	◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆

Si abordamos la situación empleando estrategias visuales para detectar el patrón de comportamiento, la determinación de qué cambia y con respecto a qué cambia precisa encontrar ciertas regularidades figurales que se extiendan a cada uno de los casos de la secuencia. Naturalmente, existe una predisposición personal a fijarse en aspectos específicos; sin embargo, sin importar esa predisposición, un tratamiento adecuado de la generalidad puede llevar a la fórmula mediante las recomendaciones que planteamos en lo sucesivo. De aquí que el **patrón** guarda en sí una relación subjetiva con la persona.

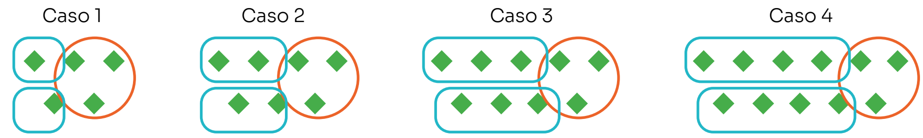
Eventualmente, estas agrupaciones basadas en argumentos visuales podrían generar conjeturas sobre el comportamiento de las secuencias, derivando en distintos tipos de fórmulas para predecir los valores futuros, lo cual representa el escenario ideal para el trabajo sobre la noción de equivalencia de expresiones. Algunas posibles conjeturas y predicciones podrían ser las siguientes.[1]

1 Con respecto a las estrategias 2a y 2b, aparentemente podría considerarse que son iguales, pero la realidad es que existen diferencias muy sensibles, puesto que las generalizaciones que pueden determinarse serán diferentes tanto en el modo de describir el comportamiento de la secuencia, como en la forma de predecir valores futuros.

Tabla 16. Posibles conjeturas basadas en las agrupaciones de elementos de la secuencia y sus respectivas predicciones de los valores futuros (López-Acosta, 2016, p. 66)

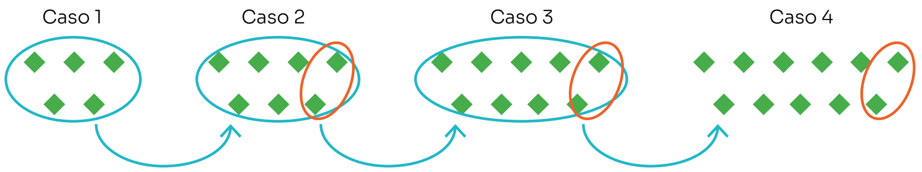
Agrupación 1	
	
Conjetura	Predicción
El comportamiento de la secuencia puede explicarse a partir de centrar la atención en cómo aumentan los objetos en cada fila. Sobre la base del apoyo que proporciona esta estrategia puede notarse que la fila superior siempre tiene un rombo más que la fila inferior. Además, la fila inferior siempre tiene un rombo más que el número de caso. Por lo tanto, se puede conjeturar que el total de rombos en cada caso se puede calcular con la suma de los rombos de ambas filas y que, en relación con el número de caso, la fila inferior tiene un rombo más que este, mientras que la fila superior tiene un rombo más que la fila inferior.	La predicción se basará en considerar la regla conjeturada en la etapa previa: *la cantidad total de rombos se obtiene adicionando al número de caso una unidad y a esa cantidad resultante se le adiciona la misma más una unidad*, o bien el número de caso más dos unidades. Esto se relaciona con adicionar las cantidades de rombos de la fila superior e inferior. Es decir, para 50, la cantidad total de rombos será (50 + 1) + (50 + 2) = 51 + 52 = 103. Simbólicamente esta regla puede expresarse de la siguiente manera: $(n + 1) + (n + 2)$.
Agrupación 2a	
	
Conjetura	Predicción
En esta agrupación, se recurre a separar la configuración total en dos tipos de configuraciones, con las cuales se pueden apreciar dos comportamientos, uno de los cuales permanece fijo (lo señalado con el óvalo), es decir, constante, mientras que lo demás cambia (lo señalado con el recuadro). De esta manera, esta estrategia puede llevar a una prueba de que la cantidad total de rombos en cada caso se puede obtener considerando sumar tres rombos al doble del número de caso.	Para la estrategia 2a la regla a considerar para la predicción está basada en la conjetura: la cantidad total de rombos se obtiene sumando, al doble del número de caso, tres rombos. Esta regla se obtiene al identificar que la agrupación que se hace en la etapa previa contiene al doble del número de caso, además de que tres rombos siempre se mantienen fijos. Por lo tanto, para predecir el valor de 50, se realiza la siguiente operación: 2(50) + 3 = 103, que simbólicamente se expresaría como $2n + 3$.

Agrupación 2b



Conjetura	Predicción
Para la estrategia 2b, se separa la configuración en tres subconfiguraciones de cada caso de la secuencia. La conjetura que puede obtenerse de esta estrategia consistirá en verificar para todos los casos que la cantidad total de rombos se puede obtener al sumar tres rombos al número de caso dos veces.	La estrategia 2b tiene como base la conjetura de que la cantidad total de rombos se puede obtener adicionando dos veces el número de caso y agregándole tres rombos a ese resultado. Por lo tanto, para predecir cuántos rombos tendrá el caso 50 se realizarían las siguientes operaciones: 50 + 50 + 3 = 103. Simbólicamente puede expresarse como $n + n + 3$.

Agrupación 3



Conjetura	Predicción
Esta agrupación se basa en una percepción recursiva de la secuencia, pues se identifica que cada caso está compuesto por el caso anterior, agregándole dos rombos más. La clave para generalizar el comportamiento está en reconocer que, de acuerdo con el número de caso, se tiene un número impar correspondiente, por ejemplo, en el primero se tienen tres rombos más dos; en el segundo, cinco rombos más dos; en el tercero, siete rombos más dos.	La conjetura se basa en una percepción recursiva de la secuencia que deberá refinarse para llegar a la siguiente regla: para obtener la cantidad total de rombos, en cada caso, se debe adicionar dos rombos al número impar que corresponde al número de caso. Bajo este esquema, la predicción de la cantidad de rombos para el caso 50 se anclará a considerar el número impar asociado a dicho caso, que se calcularía multiplicando por dos el número de caso y adicionando uno, es decir, 2(50) + 1 = 101; a esta cantidad se le deben agregar dos rombos, 101 + 2 = 103. Simbólicamente esta estrategia puede devolver una expresión del tipo $a_n = a_{n-1} + 2$, donde cada uno de los a_{n-1} puede asociarse a la expresión $2n + 1$. Por lo tanto, una expresión más general sería $a_n = (2n + 1) + 2$.

2.3. Problematización de la matemática escolar

Este apartado evidencia las ideas fuerza que pretendemos movilizar de manera transversal en el sistema educativo para desarrollar el pensamiento algebraico, en particular, el que refiere a la producción de fórmulas.

Se parte de una idea considerada fundamental: **las fórmulas son objetos algebraicos que resultan ser generalizaciones de distintos objetos matemáticos y representan relaciones de equivalencia basadas en contextos específicos**. No todas las expresiones algebraicas son fórmulas, solo aquellas expresiones que **denotan una relación de equivalencia entre constantes, variables y parámetros**, pues su función es la de representar todas las posibles soluciones a un problema (familia de soluciones), o bien todos los posibles objetos matemáticos objeto de estudio (familia de curvas, funciones, etc.).

Sobre la base de lo planteado previamente, para el trabajo con la producción de fórmulas resulta fundamental, al menos, el desarrollo de:

- **Un sentido simbólico**: promover experiencias en las que las y los estudiantes puedan desarrollar su capacidad de explorar las expresiones algebraicas; manipular y "leer" expresiones simbólicas como dos aspectos complementarios de la resolución de problemas algebraicos; tomar conciencia de que las relaciones simbólicas pueden expresar información verbal o gráfica necesaria para avanzar en un problema, y la capacidad de elaborar esas expresiones; comprobar constantemente los significados de los símbolos al resolver un problema; identificar distintas funciones que pueden desempeñar los símbolos en diferentes contextos (Arcavi, 1994).
- **Generalización y simbolización**: promover experiencias para conceptualizar la **variable** a partir de **situaciones inductivas** en las que se debe percibir y expresar lo general. Esto implica dos fases:
  - **Generalización**: pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto en común a todas ellas. Es decir, ser capaz de distinguir lo común entre un conjunto de elementos que cambian de formas específicas. Conlleva la estructura de procesos didácticos que permitan a las y los estudiantes:
    a. "Visualizar" **la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes** de lo que se está estudiando. La finalidad es que sean capaces de encontrar hipótesis sobre el comportamiento.
    b. Generar discursos orales, escritos, gestuales y figurales que den cuenta de las regularidades identificadas. El lenguaje y los instrumentos son los vehículos por los cuales objetivan sus conceptos y pensamientos.
    c. Producir signos escritos. Traducción de los distintos discursos a un discurso escrito que permita ser inteligible entre distintas personas.
  - **Simbolización**: expresar sintéticamente y con el uso de símbolos aquello común a todas las situaciones.

2.4. ¿Cómo operativizar las ideas fuerza?

Para la reflexión de cómo hacer operativas las ideas fuerza en el aula, se quiere comenzar con una revisión articulada del material que ha sido de referencia, desde su creación, para el trabajo con el contenido curricular de producción de fórmulas: *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e) y *Actualización curricular. 7.° grado* (GCABA, 2001).

En estos documentos, se plantea que, en 6.° y 7.° de primaria, se inicia explícitamente el **trabajo con la generalidad.** Esto implica un proceso progresivo que, como tal, no inicia en estos grados, sino que es una habilidad transversal a la educación matemática. No obstante, el énfasis que se le otorga a la generalidad a partir de 7.° consiste en promover los inicios del desarrollo de un pensamiento estructural y un lenguaje matemático más preciso en comparación con los grados previos y que se robustece en la secundaria.

> El tratamiento de lo general, así como la comprensión de qué es un proceso de generalización, comenzó a desplegarse en ciclos anteriores y debe ocupar en séptimo grado un lugar más importante. Esta perspectiva supone un juego entre lo particular y lo general que no puede reducirse a hacer surgir —casi mágicamente— lo general a partir de muchos ejemplos particulares. Efectivamente, *las propiedades acerca de los números, las figuras o los cuerpos no "residen" en estos objetos esperando ser "descubiertas" por los niños; son el producto de una construcción intelectual y los alumnos deben tener la oportunidad de enfrentar los problemas que hagan observables esas propiedades como producto de su propia acción intelectual sobre los objetos con los que están tratando* [énfasis agregado]. En este sentido, los ejemplos cobran valor cuando —producidos o no por el alumno— están insertos en el marco de una cierta problematización. (GCABA, 2001, pp. 67 y 68)

Para lograr estas intenciones, consideramos que las recomendaciones que sugerimos en el apartado 2.3 serán de gran relevancia para las y los docentes, ya que de lo contrario puede suceder lo que se indica en la misma fuente anterior:

> (...) ocurre muchas veces que el docente propone un conjunto de ejemplos para intentar "mostrar" una cierta regularidad y pregunta a los alumnos qué es lo que ellos observan. Suele ser sorprendente que los alumnos no "observen" aquello que el profesor espera y en cambio retengan aspectos que no son los que el profesor pretende identificar. (GCABA, 2001, p. 68)

Cabe destacar que estos primeros acercamientos a la generalidad en 6.° y 7.° se proponen a partir del estudio de la estructura de relaciones numéricas, por ejemplo, con las propiedades de la multiplicación y de la división. Recomendamos revisar los ejemplos en GCABA (2001, pp. 71-76 y 2023e, pp. 37-40), donde, respecto a la multiplicación, se da cuenta de cómo con ciertas situaciones las y los estudiantes anticipan resultados esperados a partir de poner en funcionamiento las propiedades de la multiplicación, o bien cómo, ante ciertas preguntas, se acercan a las respuestas mediante ejemplos, sin llegar a considerar una generalización de lo que están construyendo. Por otro lado, respecto a la división, se enuncian ejemplos donde la fórmula *Dividendo = divisor x cociente + resto; resto < divisor* es estudiada en tanto comprobación de que el resultado de la división es correcto, o bien se promueve el análisis de la relación para anticipar resultados, es decir, analizar las condiciones de cada uno de los elementos que la componen. También se hace mención de que el trabajo con el análisis de la relación de la división es un buen escenario para dar entrada al álgebra como movilización de la noción de variable, por ejemplo, en GCABA (2023e) se proponen actividades como las siguientes para 6.° grado.

Imagen 27. Trabajo con la generalidad en 6.° mediante el reconocimiento de regularidades aritméticas en el caso de la división (GCABA 2023e, p. 38)

Al resolver las siguientes actividades, podés usar la calculadora para explorar y comprobar.

1. Completá con los números que faltan en cada caso.

a. 5 x .... = 45 **b.** 8 x .... = 816 **c.** .... : 10 = 8 **d.** .... : 12 = 20

2. Si se sabe que 28 x 45 = 1.260:

a. ¿De cuál o cuáles de las divisiones se puede saber el cociente sin hacer la cuenta?

....

....

b. Escribí el cociente y el resto en las divisiones que creas que podés resolver sin hacer la cuenta.

....

....

c. Escribí una multiplicación y resolvela. ¿Qué cuentas de dividir podés resolver con esa multiplicación?

....

En otras palabras, el propósito del primer momento del último ciclo de nivel primario es un acercamiento a la generalidad y a las fórmulas desde la exploración de las propiedades numéricas subyacentes, basado en un enfoque inductivo.

> El trabajo acerca de los conjuntos numéricos contemplará la reflexión sobre las relaciones entre los elementos que componen cada una de las operaciones. Parte de este trabajo constituirá una base sólida en la que puedan apoyarse los alumnos para el futuro trabajo algebraico que se despliega a la entrada de la escuela secundaria (...). Desde este enfoque, se proponen (...) actividades que marcan un inicio en torno a la búsqueda de regularidades y producción de fórmulas (...). Con este trabajo se propone una entrada a la escritura simbólica ligada a los procesos de “modelización” de situaciones que dependen de un dato variable. (GCABA, 2001, pp. 68 y 69)

En el caso del ejemplo de la **Imagen 27**, nótese cómo se parte de una exploración, en primera instancia basada en la curiosidad de encontrar una propiedad aritmética entre la multiplicación y la división. Esta propiedad consiste en relacionar el resultado conocido de una multiplicación como 28 × 45 = 1.260 con otras posibilidades como:

28 × 45 + 1 = 1.261, 28 × 45 + 2 = 1.262, 28 × 45 + 3 = 1.263, 28 × 45 + 4 = 1.264, ...

De modo que, si se considera a 28 como el divisor, se identifica que se pueden conocer 27 resultados, es decir, hasta que el dividendo sea 1.287. Es importante destacar que no se propone un trabajo basado en la operatoria de expresiones con letras, pero sí centrado en el estudio de las operaciones y las relaciones.

Posteriormente, el tratamiento didáctico propone establecer tal relación al preguntar explícitamente respecto de las relaciones entre divisor, dividendo, cociente y residuo. Con esto se busca una conexión entre el procedimiento planteado previamente y la fórmula del algoritmo de la división. Sin embargo, es importante señalar que esto se solicita de manera numérica y verbal (o escrita) (ver GCABA 2023e, p. 39). Un recurso relevante es el uso de tablas para la sistematización de la información (ver **Imagen 28**).

Imagen 28. Trabajo con la generalidad en 6.° mediante el reconocimiento de regularidades aritméticas en el caso de la división (GCABA 2023e, p. 39)

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
	18	12	5
	20	15	5
214	8		6

Al completar la tabla las y los estudiantes pueden darse cuenta de que la relación explorada hasta el momento puede sistematizarse como la relación general *Dividendo = divisor x cociente + resto*.

Esta secuenciación conlleva los procesos de generalización y simbolización, y el desarrollo de un sentido simbólico, toda vez que hay una referencia concreta entre cada uno de los elementos de la fórmula ($D = d \times c + r$) con cantidades que han operado de manera significativa. Nótese también que, a pesar de que no se busca necesariamente una simbolización más formal, la relación de equivalencia es construida de manera significativa. Esto permite no solo darles sentido a los símbolos, sino también promover que las y los estudiantes se vean envueltos/as en el establecimiento de procesos de generalización.

Ahora bien, en un siguiente momento del 7.° grado, se busca la producción de fórmulas escritas desde el trabajo con “procesos —estáticos o dinámicos— pero que dependen de un dato que puede tomar diferentes valores” (GCABA, 2001, p. 78).

> Se trabajará en la dirección de buscar procedimientos de cálculo, formulados en principio en lenguaje natural. Se intentará avanzar, con algunos problemas, hacia el establecimiento de una fórmula, expresada en función del dato variable (GCABA, 2001, p. 78).

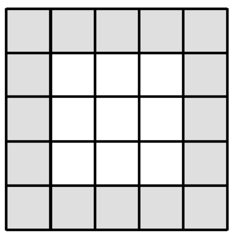
Dentro de los ejemplos se proponen actividades como la siguiente.

Imagen 29. Ejemplo de situación de búsqueda de regularidades y producción de fórmulas en 7.° grado (GCABA, 2001, p. 79)

Ejemplo 8

En este ejemplo se busca:
- la formulación en lenguaje coloquial de un procedimiento para contar algo en función de un dato variable;
- la escritura simbólica de ese procedimiento en términos de una fórmula;
- la discusión sobre distintas fórmulas a las que se puede haber arribado.

Los bordes sombreados de un cuadrado



FASE 1

a) Establecer el número de cuadritos sombreados en la figura dada (es la que se muestra arriba).
b) Calcular el número de cuadritos sombreados en un cuadrado de 37 cuadritos de lado (sobre el pizarrón se coloca un dibujo de un cuadrado con 37 cuadritos de lado).

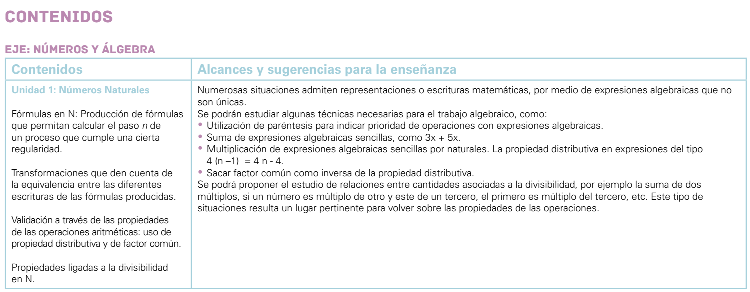
Esencialmente, el proceso propuesto para la resolución de la actividad consiste en transitar por cinco fases (GCABA, 2001).

- **Fase 1. Exploración y conteo**. Se espera que las y los estudiantes desarrollen distintas maneras de contar los cuadritos de forma que resulte más económico.
- **Fase 2. Formulación de un procedimiento de cálculo**. Se invita a las y los estudiantes a que, en su lenguaje habitual, describan un procedimiento general para contar los cuadritos del borde. El problema de proponer ese procedimiento general queda momentáneamente separado del problema de describirlo formalmente con el uso de símbolos.
- **Fase 3. Puesta en evidencia de los diferentes procedimientos de cálculo**. Se muestran todas las formulaciones producidas. Cada grupo debe: a. rechazar los métodos que no permiten calcular el número de cuadritos sombreados, justificando su rechazo, y b. reagrupar las formulaciones que considera que corresponden a un mismo método de cálculo.
- **Fase 4. Escritura de una fórmula**. La diversidad de maneras de contar los cuadritos sombreados debería conducir a fórmulas con diferentes escrituras.
- **Fase 5. Puesta en común y discusión sobre las fórmulas producidas**. La equivalencia de las distintas escrituras propuestas puede ser validada en un juego entre el contexto y las propiedades de las operaciones. Un aspecto importante del trabajo consiste en el hecho de aceptar que fórmulas que calculen lo mismo pueden escribirse de manera diferente.

Como puede observarse, en estas fases se encuentran consideraciones fundamentales para el trabajo con patrones, que han sido referenciadas en los apartados anteriores. Sin embargo, este tipo de actividad tiene la virtud de que las estrategias, procedimientos y argumentos pueden resultar tan variados como estudiantes hay en el aula. Por ello, se espera que la intervención docente permita el avance hacia este objetivo.

> Será necesario todo un conjunto de problemas, en cada uno de los cuales se irá avanzando un poco más en la producción de fórmulas y la discusión sobre las equivalencias de expresiones y sobre las escrituras en general. Dependerá de cada clase y queda a cargo del maestro la regulación del trabajo, con la mira puesta en el aprendizaje de la totalidad de la clase de séptimo grado. (GCABA, 2001, p. 79).

En el caso de la secundaria, estas ideas deben ampliarse considerablemente hacia los elementos de la **generalización** y **simbolización** de manera más formal respecto al simbolismo algebraico y al estudio de las equivalencias entre expresiones en la secundaria; sin embargo, como en el programa de estudio de primer año de secundaria, el tipo de actividades iniciales incluyen situaciones como la mostrada previamente (GCABA, 2015, p. 515).



CONTENIDOS

EJE: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Contenidos	Alcances y sugerencias para la enseñanza
Unidad 1: Números Naturales Fórmulas en N: Producción de fórmulas que permitan calcular el paso *n* de un proceso que cumple una cierta regularidad. Transformaciones que den cuenta de la equivalencia entre las diferentes escrituras de las fórmulas producidas. Validación a través de las propiedades de las operaciones aritméticas: uso de propiedad distributiva y de factor común. Propiedades ligadas a la divisibilidad en N.	Numerosas situaciones admiten representaciones o escrituras matemáticas, por medio de expresiones algebraicas que no son únicas. Se podrán estudiar algunas técnicas necesarias para el trabajo algebraico, como: • Utilización de paréntesis para indicar prioridad de operaciones con expresiones algebraicas. • Suma de expresiones algebraicas sencillas, como 3x + 5x. • Multiplicación de expresiones algebraicas sencillas por naturales. La propiedad distributiva en expresiones del tipo 4 (n –1) = 4 n - 4. • Sacar factor común como inversa de la propiedad distributiva. Se podrá proponer el estudio de relaciones entre cantidades asociadas a la divisibilidad, por ejemplo la suma de dos múltiplos, si un número es múltiplo de otro y este de un tercero, el primero es múltiplo del tercero, etc. Este tipo de situaciones resulta un lugar pertinente para volver sobre las propiedades de las operaciones.

Contenido referido al desarrollo de la generalización y las fórmulas (GCABA, 2015, p. 515).
https://bit.ly/3SQeovb

Se establecen los siguientes propósitos.

> Utilizar las propiedades de los números naturales y sus operaciones para leer y producir fórmulas que modelicen situaciones, transformar expresiones en otras equivalentes y obtener nueva información y producir argumentos que den cuenta de la validez de lo realizado. Se espera que los estudiantes, frente a un problema que demande, por ejemplo, establecer una regularidad en una configuración, puedan identificar las variables en juego, las relaciones que entre ellas se puedan establecer, producir una escritura matemática que dé cuenta tanto de la relación entre las variables como de la regularidad que se ha podido establecer. Por otro lado, se podrá indagar sobre la unicidad o no de la fórmula a partir de equivalencias entre expresiones diferentes que pudieran haberse elaborado (GCABA, 2015, pp. 529 y 530).

Además de estos contenidos, se espera también promover un acercamiento a las expresiones algebraicas que modelan fenómenos y procesos lineales, partiendo de los de proporcionalidad directa, que podrían trabajarse en ediciones futuras (GCABA, 2015, p. 518).

Contenidos	Alcances y sugerencias para la enseñanza
Análisis de tablas de funciones de proporcionalidad. La pendiente y la constante de proporcionalidad en una tabla de valores. Problemas que demanden la producción de un modelo algebraico de situaciones lineales. Aproximación gráfica a la solución de ecuaciones lineales con una variable que surgen de diferentes problemas.	Se propone como parte del trabajo con fórmulas de funciones lineales, "aprovechar" para tratar acá algunas de las fórmulas trabajadas en la unidad 1 del eje Números y álgebra dando esta vez un tratamiento más funcional e incorporando la representación gráfica. El inicio a ecuaciones se plantea a partir de funciones y el cálculo de la imagen inversa de un valor del dominio. Se proponen los problemas de encuentro como un medio fértil para abordar el estudio de las ecuaciones. Se trata de que los estudiantes aproximen las soluciones por medio de la lectura de los puntos de intersección de rectas en el registro de los gráficos cartesianos. El tema de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita comienza en primer año pero se aborda en toda su complejidad recién en segundo. Para este primer abordaje se propone la representación gráfica de la o las situaciones involucradas como herramienta para la obtención de una solución aproximada. Algebraicamente se espera que los estudiantes puedan resolver ecuaciones sencillas.

Trabajo con ecuaciones lineales (GCABA, 2015, p. 518).
https://bit.ly/3I9uHyf

Otro contexto del uso de las fórmulas se da en el caso de algunos contenidos geométricos del eje Geometría y medida, como los de área y perímetro y el teorema de Pitágoras, tal como se plantea en el documento de GCABA (2015, pp. 518 y 519), específicamente "se trata de volver sobre las ideas de perímetro y área pero en este caso consideradas variables avanzando en el tratamiento de expresiones algebraicas".

EJE: GEOMETRÍA Y MEDIDA

Contenidos	Alcances y sugerencias para la enseñanza
Unidad 1: Construcción de triángulos Construcciones de figuras que incluyan circunferencias y círculos. Uso del compás y de la computadora para la construcción de distintas figuras apelando a la idea de equidistancias. Construcción de triángulos dados dos y tres elementos, a partir de la definición de circunferencia. Discusión sobre la existencia y unicidad de la construcción. Elaboración de criterios para decidir sobre la congruencia de triángulos. Problemas de exploración, formulación y validación de conjeturas sobre la base de los criterios de congruencia de triángulos. Perímetro y área de triángulos. Estudio de la variación del área en función de la variación de la base o altura. Transformación y equivalencia de fórmulas.	Como resultado del trabajo de construcción que se propone, se espera que los estudiantes tengan dominio del uso de instrumentos y dispongan de la definición de circunferencia, requisitos necesarios para entender y justificar las construcciones de triángulos y cuadriláteros. Las actividades de construcción de triángulos tienen por objeto la producción de nuevas propiedades de las figuras, necesarias para argumentaciones posteriores. La manipulación con los instrumentos para la realización de los dibujos debe ir acompañada de un cierto grado de anticipación. Las primeras construcciones apuntan a la puesta en escena de criterios de congruencia de triángulos. En un primer momento se acepta el uso de regla graduada y transportador y la medición como criterio válido para construir ángulos y segmentos congruentes. El enunciado de criterios de igualdad de triángulos se propone a partir del trabajo de construcciones realizado y de la discusión acerca de la existencia y unicidad. Para decidir la existencia y unicidad de la solución en los distintos casos de congruencia, se esperan justificaciones que se apoyen en la visualización y en la intuición. Una vez establecidos criterios de congruencia de triángulos, podrán justificarse las construcciones con regla no graduada y compás. Se trata de volver sobre las ideas de perímetro y área pero en este caso consideradas variables avanzando en el tratamiento de expresiones algebraicas.

Uso de las fórmulas en el contexto de la geometría (GCABA, 2015, pp. 518 y 519)
https://bit.ly/3I9uHyf

En segundo año de secundaria el salto de abstracción se presenta en términos de emplear las fórmulas explícitamente para modelar las propiedades numéricas, los fenómenos lineales y los comportamientos geométricos. He aquí algunos de los contenidos que abordar.

Tabla 17. Uso de las fórmulas en 2.° de secundaria (GCABA, 2015, pp. 522 y 524)

Eje/Unidad	Contenido declarado	Alcances y sugerencias para la enseñanza
Números y álgebra. Números naturales: combinatoria.	Producción de fórmulas para contar. El diagrama de árbol como recurso para contar de manera exhaustiva.	No es un objetivo la utilización de las fórmulas de combinatoria, sino la producción de estrategias de solución. Interesa destacar aquellos procedimientos de resolución que aseguren la exhaustividad y el papel que juegan las representaciones con las cuales se intenta organizar el conteo de la colección. Las fórmulas serán construidas por los/as estudiantes a partir de la generalización propuesta en un problema, continuando con la actividad iniciada en álgebra en primer año.
Números y álgebra. Números enteros: divisibilidad	Producción, formulación y validación de conjeturas referidas a cuestiones de divisibilidad	También se trata de introducir el álgebra como herramienta para conocer propiedades de las operaciones. Los problemas que se presenten a los/as estudiantes podrán proponer la puesta en juego del trabajo algebraico.
Funciones y álgebra. Ecuación de la recta	Resolución de problemas que se modelizan con ecuaciones lineales con dos variables.	Se propone que el trabajo implique la resolución de problemas en contextos de manera de avanzar en la idea de modelización mediante una ecuación con dos variables, pero que incorporan restricciones de modo de resultar un conjunto finito de pares como solución. Se propone que la ecuación no sea solamente una "igualdad con incógnita", sino la expresión de una condición sobre un conjunto de números que tiene asociada un conjunto solución. En ese sentido, las ecuaciones sin solución y las ecuaciones con infinitas soluciones deben ser tratadas en igualdad de condiciones y no como casos "raros". La noción de ecuación equivalente y la discusión acerca de distintas operaciones que dejan invariante el conjunto solución deben estar incluidas en el trabajo en torno al tratamiento de las ecuaciones.
Funciones y álgebra. Función de proporcionalidad inversa	Problemas que se modelizan con funciones de proporcionalidad inversa. Estudio de la función 1/x. Corrimientos. Asíntotas.	Se propone que los/as estudiantes puedan tratar con problemas que pongan en funcionamiento relaciones de proporcionalidad inversa, puedan avanzar en el trabajo con fórmulas y gráficos, así como estudiar las relaciones entre la variación del gráfico y la variación de la fórmula en términos de corrimientos.

Sobre la base de lo expuesto previamente, es importante destacar que el trabajo con las fórmulas debe buscar los **procesos de generalización y simbolización**, así como el **desarrollo de un sentido simbólico**, en cualquier nivel en el que se estén considerando. Es decir, exige una congruencia de significado entre los elementos de los objetos que se trabajan y el contexto en el que se está trabajando. Las preguntas principales que se proponen atender son las siguientes.

Tabla 18. Preguntas clave para el trabajo con la generalidad, la simbolización y el sentido simbólico

Grado / Año	Preguntas clave para la orientación didáctica	Preguntas para promover los procesos de generalización, simbolización y sentido simbólico
6.°	▪ ¿Se promueve una actividad de generalización? ▪ ¿La estructura de la actividad permite la inducción? ▪ ¿Las y los estudiantes reconocen las estructuras aritméticas subyacentes?	▪ ¿Podés detectar algún patrón de relación entre las cantidades y las operaciones? ▪ Analizá los casos 1, 2, 3, ¿podés encontrar alguna relación entre las cantidades y las operaciones?, ¿qué guardan en común?, ¿qué cambia? ▪ ¿Qué significa cada uno de los elementos de tal relación con el procedimiento que las vincula? Por ejemplo, en la operación 28 × 45 + 1 = 1.261, ¿qué cantidad es el divisor?, ¿cuál es el dividendo?, ¿cuál es el cociente? y ¿cuál es el residuo?
7.°	▪ ¿Cómo puedo promover una experiencia diversa con el trabajo de la generalidad? ▪ ¿La estructura de la actividad permite la inducción? ▪ ¿Las y los estudiantes reconocen las estructuras aritméticas subyacentes? ▪ ¿Cómo puedo promover un acercamiento a la escritura de esas generalidades de manera matemática?	▪ ¿Podés detectar algún patrón de relación entre los elementos que observás en las secuencias (numéricas o figurales)? ▪ Analizá los casos 1, 2, 3, ¿podés encontrar alguna relación entre las cantidades y cada uno de los casos?, ¿qué guardan en común?, ¿qué cambia? ▪ ¿Podés expresar de manera escrita tus hallazgos para que cualquiera de tus compañeros/as los entienda? ▪ ¿Qué significa cada uno de los elementos que usaste en tu expresión con relación al patrón que detectaste?
1.°	▪ ¿Cómo puedo promover la detección de la generalidad de las propiedades numéricas, figurales o geométricas? ▪ ¿Cómo puedo promover un acercamiento a la escritura de esas generalidades de manera matemática? ▪ ¿Cómo se puede promover la identificación de la equivalencia entre distintas expresiones simbólicas? ▪ ¿Cómo puedo robustecer el sentido simbólico en mis estudiantes?	▪ ¿Podés detectar algún patrón de relación entre los elementos que observás en las secuencias (numéricas o figurales)? ▪ Analizá los casos 1, 2, 3, ¿podés encontrar alguna relación entre las cantidades y cada uno de los casos?, ¿qué guardan en común?, ¿qué cambia? ▪ ¿Podés expresar con símbolos tus hallazgos para que cualquiera de tus compañeros/as los entienda? ▪ ¿Qué significa cada uno de los símbolos que usaste en tu expresión con relación al patrón que detectaste? ▪ ¿A qué caso de la secuencia le corresponden 36 elementos?
2.°	▪ ¿Cómo puedo promover la detección de la generalidad de las propiedades numéricas, figurales o geométricas? ▪ ¿Cómo puedo promover un acercamiento a la escritura de esas generalidades de manera matemática? ▪ ¿Cómo se puede promover la identificación de la equivalencia entre distintas expresiones simbólicas? ▪ ¿Cómo puedo robustecer el sentido simbólico en mis estudiantes?	▪ ¿Podés detectar algún patrón de relación entre los elementos que observás en las secuencias (numéricas o figurales)? ▪ Analizá los casos 1, 2, 3, ¿podés encontrar alguna relación entre las cantidades y cada uno de los casos?, ¿qué guardan en común?, ¿qué cambia? ▪ ¿Podés expresar con símbolos tus hallazgos para que cualquiera de tus compañeros/as los entienda? ▪ ¿Qué significa cada uno de los símbolos que usaste en tu expresión con relación al patrón que detectaste? ▪ ¿A qué caso de la secuencia le corresponden 36 elementos? ▪ ¿Podrías explicar por qué, al considerar un caso específico, la expresión $n(n + 2)$ devuelve la misma cantidad que la expresión $n^2 + 2n$? Encontrá otra expresión que devuelva la misma cantidad que las dos expresiones previas para un caso específico. ¿Cómo la obtuviste?

Nótese que los cuestionamientos propuestos para promover la generalización, simbolización y sentido simbólico requieren de la construcción de escenarios en el aula que permitan la comunicación explícita respecto a lo que observan, comprenden y abstraen de las situaciones. Es fundamental construir estos espacios que permitan una discusión colectiva de los argumentos, conjeturas y perspectivas, no únicamente sobre cómo generalizar, sino también sobre aquello que generalizan, con la intención de que todas estas formas de pensamiento puedan eventualmente institucionalizarse.

La progresión propuesta en los materiales curriculares parte del trabajo con la detección de regularidades a partir de la exploración, principalmente numérica, al final de 6.° y principio de 7.° grado. Para esta exploración es importante promover la inducción con la intención de que la generalización sea más robusta.

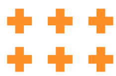
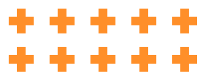
Por ejemplo, si se emplea el algoritmo de la división entera $D = d \cdot c + r$; $r < D$, es fundamental, en primera instancia, una exploración numérica como la que se propone en GCABA (2001, pp. 74-78; 2023e, pp. 37-40) en la que, a través de un proceso inductivo con muchos casos, se establezcan relaciones entre cada uno de los componentes de la fórmula. Eventualmente, se busca hacer explícita la fórmula y generar conclusiones al respecto.

Principalmente, es en el 7.° grado donde se comienza con la construcción de fórmulas por medio de los procesos de generalización y simbolización descritos ampliamente en el apartado previo.

En el caso de una actividad como la de la **Imagen 29**, nótese que en la propuesta no se incluye explícitamente la consigna de solicitar la expresión verbal o escrita de lo que se está detectando al momento de identificar la regularidad. Es importante hacer explícito este proceso en el aula, no solo para que mediante el lenguaje se estructure el pensamiento de las y los estudiantes, sino también para que las y los docentes tengan información respecto de lo que ven y cómo lo ven sus estudiantes (dadas las posibles diferencias de percepción).

Una secuencia sugerida podría ser como la siguiente (López-Acosta, 2016).

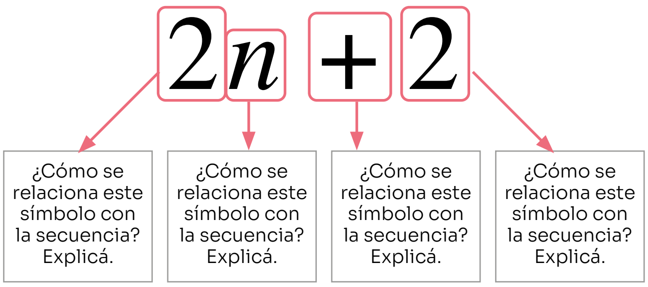
Observá la siguiente secuencia de imágenes.

Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
			

a. Elaborá una explicación verbal sobre cómo cambia la cantidad de cruces de un caso a otro.
b. Dibujá cómo se debería ver el caso 7.
c. Completá la siguiente tabla. En caso de que no se indique el número de caso, determinalo.

Caso	Cantidad de cruces
1	
2	
	8
4	
5	
6	
15	
	38
21	
	70
101	

d. ¿Cómo le explicarías por escrito a una persona que no puede ver la secuencia cómo calcular la cantidad total de cruces para cualquier caso? Escribí tu explicación.
e. Imaginá ahora un caso que llamaremos *n*, es decir, un caso general. Expresá una fórmula con símbolos para el caso *n* con la que se pueda calcular la cantidad de cruces que tendría ese caso.
f. Considerá la fórmula $2n + 2$. Respondé las siguientes preguntas.



En el avance de 1.° a 2.° se debe procurar el trabajo con la identificación de las expresiones equivalentes. Para ello, resulta conveniente el uso de distintos patrones que pudieran desencadenar una diversidad de expresiones, como el mostrado en la **Imagen 30**.

Imagen 30. Ejemplo de patrón figural con la posibilidad de múltiples expresiones asociadas (adaptado de Mason, 1996)

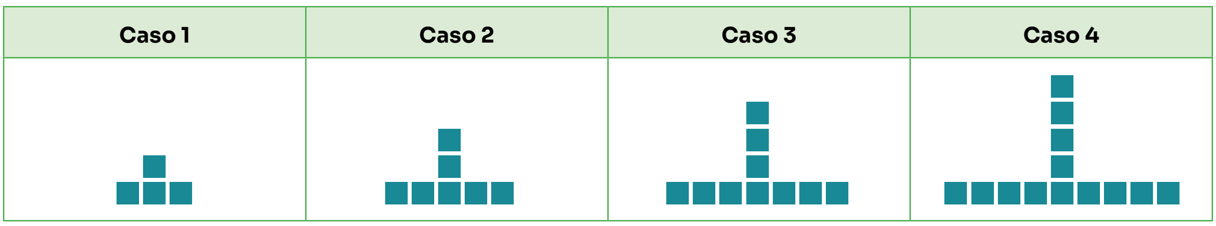
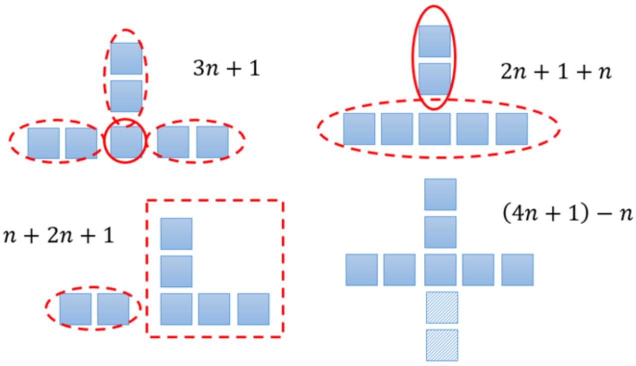


Imagen 31. Distintas regularidades figurales percibidas (López-Acosta, 2016)

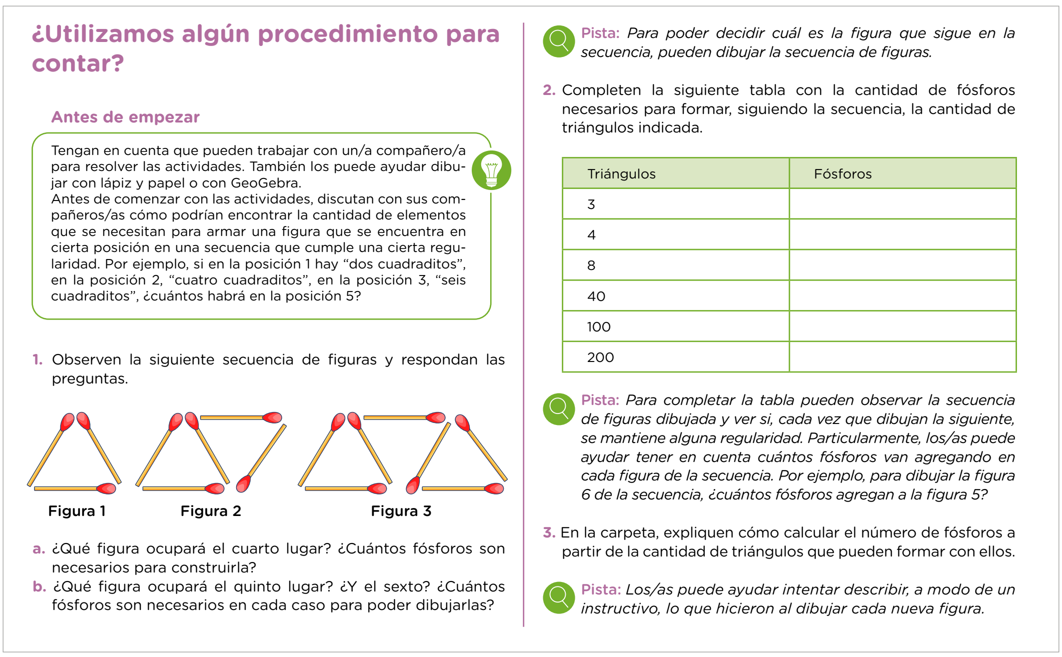


Se recomienda invitar a exponer a distintos grupos de estudiantes con diversas expresiones que muestren cómo las obtuvieron y bajo qué procesos visuales para convencer a sus pares sobre la validez de estas regularidades y cómo les permitieron determinar las fórmulas. Solo cuando el grupo de estudiantes sea consciente de la equivalencia de los procesos de pensamiento por las deducciones planteadas y el hecho de que permitan obtener los mismos resultados, habrá espacio para determinar la equivalencia entre las expresiones.

Otra sugerencia para promover la discusión de la equivalencia de las expresiones es hacer la solicitud explícita, por ejemplo, mediante una instrucción como la siguiente: *además de la fórmula que determinaste, intentá proponer otra fórmula que también permita calcular la cantidad de objetos para cada caso específico*.

Estos son solo algunos ejemplos respecto de cómo producir los procesos de generalización, simbolización y sentido simbólico. En los documentos curriculares se presenta una gran variedad de estas actividades, con la salvedad de que no en todas se proponen explícitamente estos procesos detallados previamente. Mostraremos un ejemplo en el que sí hay indicios de una progresión hacia la generalización. Considérese la siguiente actividad:

Imagen 32. Actividad que promueve la generalización y simbolización (GCABA, s/f a, pp. 1 y 2)



¿Utilizamos algún procedimiento para contar?

Antes de empezar

Tengan en cuenta que pueden trabajar con un/a compañero/a para resolver las actividades. También los puede ayudar dibujar con lápiz y papel o con GeoGebra.
Antes de comenzar con las actividades, discutan con sus compañeros/as cómo podrían encontrar la cantidad de elementos que se necesitan para armar una figura que se encuentra en cierta posición en una secuencia que cumple una cierta regularidad. Por ejemplo, si en la posición 1 hay "dos cuadraditos", en la posición 2, "cuatro cuadraditos", en la posición 3, "seis cuadraditos", ¿cuántos habrá en la posición 5?

1. Observen la siguiente secuencia de figuras y respondan las preguntas.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a. ¿Qué figura ocupará el cuarto lugar? ¿Cuántos fósforos son necesarios para construirla?
b. ¿Qué figura ocupará el quinto lugar? ¿Y el sexto? ¿Cuántos fósforos son necesarios en cada caso para poder dibujarlas?

Pista: *Para poder decidir cuál es la figura que sigue en la secuencia, pueden dibujar la secuencia de figuras.*

2. Completen la siguiente tabla con la cantidad de fósforos necesarios para formar, siguiendo la secuencia, la cantidad de triángulos indicada.

Triángulos	Fósforos
3	
4	
8	
40	
100	
200	

Pista: *Para completar la tabla pueden observar la secuencia de figuras dibujada y ver si, cada vez que dibujan la siguiente, se mantiene alguna regularidad. Particularmente, los/as puede ayudar tener en cuenta cuántos fósforos van agregando en cada figura de la secuencia. Por ejemplo, para dibujar la figura 6 de la secuencia, ¿cuántos fósforos agregan a la figura 5?*

3. En la carpeta, expliquen cómo calcular el número de fósforos a partir de la cantidad de triángulos que pueden formar con ellos.

Pista: *Los/as puede ayudar intentar describir, a modo de un instructivo, lo que hicieron al dibujar cada nueva figura.*

4. Sofía dice que, para averiguar cuántos fósforos se necesitan para armar la figura que tiene 100 triángulos, puede hacer el siguiente cálculo:
3 + 2 x (100 - 1)
¿Están de acuerdo? En la carpeta, expliquen cómo lo pensaron.

Pista: *Los/as puede ayudar tener en cuenta los cálculos que hicieron para determinar la cantidad de fósforos para las distintas figuras.*

5. ¿Es posible que una de las figuras tenga 36 fósforos? ¿Por qué?

Pista: *Los/as puede ayudar considerar la explicación de la actividad 3 u observar el procedimiento utilizado por Sofía.*

Antes de terminar

Observen que, para determinar la cantidad de fósforos en la secuencia de figuras, cuando tenemos pocos triángulos nos ayuda el dibujo, pero cuando la cantidad de triángulos aumenta necesitamos algún procedimiento para poder contar. En la carpeta, expliquen con sus palabras para qué les sirve encontrar algún procedimiento de conteo.

Para profundizar

Para seguir estudiando sobre las fórmulas para contar, les proponemos que vean el siguiente video.

Apoyo Escolar Secundaria - Producción de formas y regularidad (1. ° AÑO)
EducacionBA
https://bit.ly/3qasFpc
Duración: 2:27 minutos.

Escaneá este código para acceder al contenido.

Obsérvese que la consigna 1 propone dos procesos:

a. La exploración del patrón, en la que se pregunta sobre un caso específico, el siguiente a los presentados. Esta pregunta tiene como finalidad la exploración inicial que induzca a la búsqueda de la visualización de la **regularidad, la diferencia y la relación entre las partes**.

b. El reforzamiento de lo solicitado en a. puesto que se pregunta sobre más casos. Además, mediante la pregunta *¿cuántos fósforos son necesarios en cada una para poder dibujarlos?,* se busca el planteamiento de las **regularidades identificadas**.

Nótese que en la instrucción inicial ya se promueve la **producción de discursos** para explicar el patrón. Incluso se sugiere el uso de dibujos como una de las pistas.

Imagen 33. Instrucción que indica la comunicación de las ideas (GCABA, s/f a, p. 1)

Antes de empezar

Tengan en cuenta que pueden trabajar con un/a compañero/a para resolver las actividades. También los puede ayudar dibujar con lápiz y papel o con GeoGebra.
Antes de comenzar con las actividades, discutan con sus compañeros/as cómo podrían encontrar la cantidad de elementos que se necesitan para armar una figura que se encuentra en cierta posición en una secuencia que cumple una cierta regularidad. Por ejemplo, si en la posición 1 hay “dos cuadraditos”, en la posición 2, “cuatro cuadraditos”, en la posición 3, “seis cuadraditos”, ¿cuántos habrá en la posición 5?

Posteriormente, en la **consigna 2**, aparece un recurso importante para apoyar este proceso de generalización: la tabla. Con ella se busca transitar del contexto figural al numérico, puesto que se busca la abstracción de las variables necesarias para determinar el patrón.

Imagen 34. Registro tabular para promover la transición hacia lo numérico (GCABA, s/f a, p. 2)

Pista: *Para poder decidir cuál es la figura que sigue en la secuencia, pueden dibujar la secuencia de figuras.*

2. Completen la siguiente tabla con la cantidad de fósforos necesarios para formar, siguiendo la secuencia, la cantidad de triángulos indicada.

Triángulos	Fósforos
3	
4	
8	
40	
100	
200	

Pista: *Para completar la tabla pueden observar la secuencia de figuras dibujada y ver si, cada vez que dibujan la siguiente, se mantiene alguna regularidad. Particularmente, los/as puede ayudar tener en cuenta cuántos fósforos van agregando en cada figura de la secuencia. Por ejemplo, para dibujar la figura 6 de la secuencia, ¿cuántos fósforos agregan a la figura 5?*

Nótese también cómo se hace específico, en la pista inferior, que se centre la atención en una de las **constantes** en el comportamiento: el término independiente b de la relación lineal $y = ax + b$. En este caso, 2.

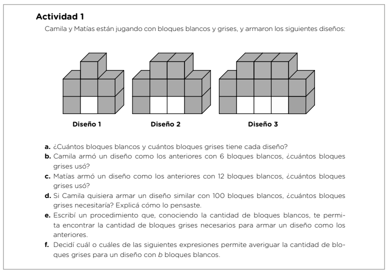
Con la **consigna 3** ya se intenta el proceso de generalización, ya no solo de manera verbal, numérica o figural, sino tendiendo a la **simbolización**. Esto se da mediante la instrucción "expliquen cómo calcular el número de fósforos a partir de la cantidad de triángulos que pueden formar con ellos". Nótese que ya no se especifica para un caso concreto.

Con la **consigna 4** se busca hacer converger las posibles formas de expresión del patrón hacia la concreción de la expresión algebraica. Esto se hace con la ayuda de un caso expresado con la notación simbólica $3 + 2(100 - 1)$ para que las y los estudiantes puedan verificar que, si lograron deducir el comportamiento, esta forma de expresar el caso 100 cumpliría con su deducción y, por tanto, sería equivalente. Se busca la determinación de la expresión $3 + 2(n - 1)$ para la progresión aritmética subyacente. A aquellas personas que aún no hayan detectado el patrón les servirá para aceptar esta forma de expresión, al notar que sí se corresponde con el comportamiento.

Finalmente, con la **consigna 5** se trata de promover una reversibilidad del proceso, al preguntar ahora sobre una cantidad específica de objetos para obtener el caso al que le correspondía. Esta acción es importante por el hecho de que la reversibilidad permite reflexionar sobre la estructura matemática subyacente.

Cabe destacar que, posteriormente a este trabajo, es importante que, al proponer y concretar distintas expresiones, pueda especificarse qué representa cada uno de los signos empleados en las expresiones. Esto conducirá al robustecimiento del **sentido simbólico**, puesto que en todo momento hay correspondencias entre los signos propuestos (palabras orales, palabras escritas, gestos, figuras) con el contexto.

En los siguientes enlaces se muestran otros ejemplos presentes en los distintos materiales curriculares con los que se puede generar el mismo tipo de actividad. Cabe destacar que estos casos no presentan como tal una secuenciación explícita como la mostrada previamente.



Actividad 1

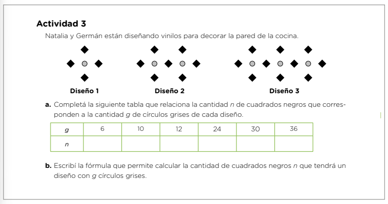
Camila y Matías están jugando con bloques blancos y grises, y armaron los siguientes diseños:

Diseño 1 **Diseño 2** **Diseño 3**

a. ¿Cuántos bloques blancos y cuántos bloques grises tiene cada diseño?
b. Camila armó un diseño como los anteriores con 6 bloques blancos, ¿cuántos bloques grises usó?
c. Matías armó un diseño como los anteriores con 12 bloques blancos, ¿cuántos bloques grises usó?
d. Si Camila quisiera armar un diseño similar con 100 bloques blancos, ¿cuántos bloques grises necesitaría? Explicá cómo lo pensaste.
e. Escribí un procedimiento que, conociendo la cantidad de bloques blancos, te permita encontrar la cantidad de bloques grises necesarios para armar un diseño como los anteriores.
f. Decidí cuál o cuáles de las siguientes expresiones permite averiguar la cantidad de bloques grises para un diseño con b bloques blancos.

GCABA (2021b, p. 20)
https://bit.ly/3ORZIus

GCABA (2021b, p. 21)
https://bit.ly/3TbJChW



Actividad 3

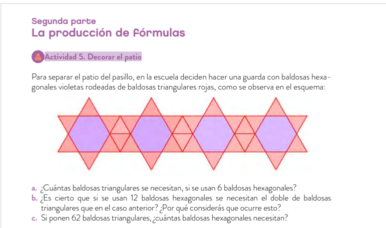
Natalia y Germán están diseñando vinilos para decorar la pared de la cocina.

Diseño 1 **Diseño 2** **Diseño 3**

a. Completá la siguiente tabla que relaciona la cantidad n de cuadrados negros que corresponden a la cantidad g de círculos grises de cada diseño.

g	6	10	12	24	30	36
n						

b. Escribí la fórmula que permite calcular la cantidad de cuadrados negros n que tendrá un diseño con g círculos grises.



Segunda parte

La producción de fórmulas

Actividad 5. Decorar el patio

Para separar el patio del pasillo, en la escuela deciden hacer una guarda con baldosas hexagonales violetas rodeadas de baldosas triangulares rojas, como se observa en el esquema:

a. ¿Cuántas baldosas triangulares se necesitan, si se usan 6 baldosas hexagonales?
b. ¿Es cierto que si se usan 12 baldosas hexagonales se necesitan el doble de baldosas triangulares que en el caso anterior? ¿Por qué considerás que ocurre esto?
c. Si ponen 62 baldosas triangulares, ¿cuántas baldosas hexagonales necesitan?

GCABA (2018b, p. 27)
https://bit.ly/48PRt9d

GCABA (2018b, p. 30)
https://bit.ly/4c7WNaX

Cuarta parte

Diseño de un patio

Actividad 11. El embaldosado

El patio de la escuela va a ser embaldosado con baldosas octogonales y cuadradas. Midan el patio y diseñen una forma de hacerlo de manera que quede un patio con una reproducción geométrica. Traten de realizar un plano a escala de cómo quedaría el patio decorado. Se les sugiere usar Geogebra y la herramienta "polígono regular". Por ejemplo:

Busquen en internet los precios de las baldosas que usarán y diseñen el modelo de programa que hay que hacer en la planilla de cálculo para que, conociendo la cantidad de baldosas octogonales que necesitan, puedan encontrar el precio que se deberá pagar por el patio completo.

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivo del año	Introducir a las y los estudiantes a los procesos de generalización mediante el trabajo inductivo de reconocimiento de relaciones numéricas.	Profundizar en los procesos de generalización mediante el trabajo inductivo de reconocimiento de relaciones numéricas y figurales. Se inicia la búsqueda de una simbolización más cercana a la formal.	Construcción de expresiones algebraicas mediante procesos de generalización y simbolización.	Construcción de expresiones algebraicas mediante procesos de generalización y establecimiento de relaciones de equivalencia entre expresiones.
Ideas fuerza	Para introducir al estudio de los procesos de generalización es pertinente elegir situaciones de relaciones aritméticas para generar inductivamente esas relaciones de manera general.	Profundizar en el estudio de los procesos de generalización conlleva el uso de otros contextos de patrones de regularidad. Importa acercarse a formas de expresión cada vez más simbólicas. Debe promoverse la secuencia: “visualizar” la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes, generar discursos que den cuenta de la regularidad, producción de signos escritos.	El tratamiento de la generalidad debe sustentarse de manera explícita en la secuenciación: “visualizar” la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes, generar discursos que den cuenta de la regularidad, producción de signos escritos. Además, debe buscarse explícitamente una escritura sintética y promover un sentido simbólico.	Profundizar en el tratamiento de la generalidad buscando la construcción de expresiones algebraicas más formales, su manipulación y establecimiento de equivalencias entre varias de ellas. Además, debe promoverse un sentido simbólico.
Preguntas clave	• ¿Cómo se detecta un patrón de relación entre las cantidades y las operaciones? • Si se analiza el caso 1, el caso 2, el caso 3, ¿cómo encontrar alguna relación entre las cantidades y las operaciones?, ¿qué guardan en común?, ¿qué cambia? • ¿Qué significa cada uno de los elementos de la expresión matemática con relación a las operaciones aritméticas y procedimientos que los vincula?	• ¿Cómo se detecta un patrón de relación entre los elementos que se observan en ciertas secuencias (numéricas o figurales)? (1) • Si se analiza el caso 1, el caso 2, el caso 3, ¿cómo encontrar alguna relación entre las cantidades y cada uno de los casos?, ¿qué guardan en común?, ¿qué cambia? (2) • ¿Cómo expresar de manera escrita los propios hallazgos para que cualquier persona los entienda? • ¿Qué significa cada uno de los elementos de la expresión matemática que se usan para representar la relación con el patrón de comportamiento detectado?	Retomar preguntas (1) y (2) • ¿Cómo expresar con símbolos los propios hallazgos para que cualquier persona los entienda? (3) • ¿Qué significa cada uno de los símbolos que se usan para representar la relación con el patrón de comportamiento detectado? (4) • ¿A qué caso de la secuencia le corresponden cierta cantidad de elementos? (5)	Retomar preguntas (1), (2), (3), (4) y (5) • ¿Cómo explicar por qué, al considerar un caso específico, la expresión $n(n + 2)$ devuelve la misma cantidad que la expresión $n^2 + 2n$? Determinar otra expresión que devuelva la misma cantidad que las dos expresiones previas para un caso específico.
Materiales propuestos	• *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e) • *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f)	• *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f) • *Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria* (GCABA, 2023a y 2023g)	• *¿Utilizamos algún procedimiento para contar?* Ficha didáctica 1.° de secundaria (GCABA, s/f a)	• *Estudiar y aprender. 2.° año. Tomo 2* (GCABA, 2021d)

Capítulo 3. Función lineal

3.1. Ubicación curricular

Este apartado pretende visibilizar dónde y cómo se presentan los objetivos y alcances curriculares relativos al contenido específico de **función lineal**. Para ello, profundizaremos en la distinción entre proporcionalidad directa y variación lineal, poniendo énfasis en la idea de la variación. Para la revisión se considerarán diferentes documentos publicados por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (GCABA).

Tabla 19. Síntesis de ubicación curricular del contenido de función lineal

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivos curriculares	*Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* (2014) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)		*Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2ª ed., 2015) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)	
	Tema: Números naturales y operaciones • Participar de discusiones y de la producción de explicaciones que se basen en el análisis de las operaciones subyacentes a las escrituras numéricas. (p. 124) **Tema: Relaciones entre variables** • Analizar las relaciones entre diferentes procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad. (p. 125)	**Tema: Números naturales y operaciones** • Reconocer y utilizar la relación $D = d \times c + r$, con $r < d$. • Analizar y utilizar los criterios de divisibilidad para establecer relaciones entre números, entre cálculos y establecer cocientes y restos. (p. 126) **Tema: Relaciones entre variables** • Analizar las condiciones para que una situación sea de proporcionalidad directa. (p. 127)	**Eje: Funciones y álgebra. Aproximación a las funciones a través de gráficos** • Gráficos cartesianos: interpretación y producción. Lecturas directas de los gráficos. Inferencia de información a partir de la lectura del gráfico. • Identificación de las variables que se relacionan y análisis de la variación de una en función de la otra. Imagen inversa de un punto usando como apoyo las representaciones gráficas. (p. 517) **Eje: Funciones y álgebra. Aproximación a las funciones a través de gráficos** • Análisis de procesos que crecen o decrecen uniformemente. Procesos lineales discretos y procesos continuos, fórmula para describirlos. • La función lineal como modelizadora de situaciones de crecimiento uniforme. • Diferenciación entre crecimiento directamente proporcional y crecimiento lineal pero no proporcional. • Análisis de tablas de funciones de proporcionalidad. La pendiente y la constante de proporcionalidad en una tabla de valores. (p. 517)	**Eje: Funciones y álgebra. Función lineal** • Revisión de la noción de función lineal como modelo de variación constante. Identificación de puntos que pertenecen al gráfico de la función. • Problemas que se modelizan con funciones lineales con una variable. (p. 523) **Eje: Funciones y álgebra. Ecuación de la recta** • Ecuación de la recta. • Producción de la representación gráfica y de la ecuación de una recta a partir de ciertos datos: dos puntos cualesquiera, un punto y la pendiente, los puntos donde corta a los ejes. • Problemas que se modelizan con ecuaciones lineales con una incógnita. Ecuación lineal a una variable. • Representación en la recta numérica de las soluciones de una inecuación lineal con una incógnita. (p. 524)

<table>
<tr><th>Unidad de análisis</th><th colspan="2">Primaria</th><th colspan="2">Secundaria</th></tr>
<tr><td>Alcances planteados desde la propuesta actual</td><td></td><td></td><td>• Caracterizar los fenómenos lineales mediante un análisis comparativo de diferentes problemas; algunos de ellos que describen procesos de crecimiento uniforme y otros que no.
• Expresar dichos fenómenos por fórmulas lineales en la variable independiente (x), del tipo f (x) = a x + b.
• Identificar globalmente las características del gráfico de las funciones lineales.
• Estudiar fenómenos que se representan mediante una relación de proporcionalidad directa como introducción a la función lineal.</td><td>• Estudiar la propiedad fundamental de las funciones lineales (Dy / Dx = constante).
• Estudiar las ecuaciones lineales a partir del trabajo con funciones, donde las soluciones son valores puntuales para un valor determinado.</td></tr>
<tr><td>Progresiones Ideas principales</td><td colspan="2">• Búsqueda de regularidades.
• Producción de fórmulas.
• Proporcionalidad directa.</td><td colspan="2">• Variación uniforme.
• Proporcionalidad directa.
• Interpretación de parámetros.
• Articulación de representaciones.
• Modelización de fenómenos lineales.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estudiar y aprender PUENTE</td><td colspan="4">Divisibilidad
• Identificar múltiplos y divisores de un número natural a partir de su descomposición en factores, la justificación del funcionamiento de ciertos criterios de divisibilidad y el análisis de la información que brinda un cálculo combinado en términos de sus múltiplos y/o divisores. (GCABA, 2023a, pp. 13 y 14)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Proporcionalidad directa
• En los diferentes problemas que se proponen, y en el marco de los números naturales y racionales, se pretende recuperar lo trabajado en años anteriores para poner en discusión cuáles son las condiciones que tienen que existir para que dos magnitudes se relacionen de manera directamente proporcional.
Representaciones gráficas
• La última sección de esta unidad está conformada por algunos problemas que invitan al trabajo con ciertas representaciones gráficas entre variables y su conexión con los modelos proporcionales. (GCABA, 2023a, pp. 12 y 13)</td></tr>
</table>

Es importante hacer hincapié en que varios de los objetivos curriculares de segundo ciclo de primaria (6.° y 7.°) no son explícitamente en torno a la función lineal. Sin embargo, se consideran de gran aporte para el desarrollo de las ideas principales en las progresiones. Por ejemplo, *analizar y utilizar los criterios de divisibilidad para establecer relaciones entre números, entre cálculos y establecer cocientes y restos* es fundamental para reconocer la relación existente entre los diferentes elementos de la división, $D = d \times c + r$, con $r < d$, la cual es una relación lineal que, si bien no es explicitada en este ciclo, sí se trabaja en el nivel secundario.

3.2. Contextualización disciplinar

El trabajo con funciones lineales es, escolarmente, la introducción al aprendizaje de la noción de función y al estudio de los fenómenos de cambio, lo cual se profundiza principalmente en el nivel secundario; por ello, la complejidad de su enseñanza refiere, en general, a la complejidad de la enseñanza del concepto de función. En ese sentido, las investigaciones han demostrado una serie de dificultades debido a aspectos como el predominio de una perspectiva estática en el trabajo con las representaciones gráficas, es decir, asumir que la lectura de una función representada en una gráfica se da por entendida a partir de la interpretación de los pares ordenados, o bien de considerarlos solo como una correspondencia de valores en donde a cada valor de X, la variable independiente, se le asigna un valor de Y, la variable dependiente (tratamiento conjuntista de la noción de función).

En ese sentido, los materiales curriculares propuestos por el Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires mencionan que:

> En el eje Funciones y álgebra se propone una aproximación al estudio de funciones a partir de los gráficos **como soporte para estudiar el comportamiento de las variables** en juego, en lugar de un tratamiento conjuntista. La resolución de **problemas vinculados a procesos que varían**, a partir de las representaciones gráficas, precederá cualquier definición formal del concepto de función. (GCABA, 2015, p. 512)

El tratamiento conjuntista hace referencia a un enfoque estático de las funciones en el que suele asumirse que una regla de correspondencia entre dos variables —por ejemplo, a cada valor de x le corresponde su doble, lo que se representa como $f(x) = 2x$, así cuando $x = 3$, $f(x) = 2(3) = 6$— es suficiente para introducir la noción de función. Sin embargo, este acercamiento poco se relaciona con una situación de variación, es decir, no se hace alusión a que esta expresión puede representar un fenómeno en el que una de las variables cambia de manera constante, por lo que su variación es uniforme.

Por ello, no basta con ampliar la definición de función (no limitarla al tratamiento conjuntista) sino que resulta importante lograr que las y los estudiantes identifiquen las características de los fenómenos que son modelados por funciones, su comportamiento y sus formas de variación.

Por eso, el primer apartado de esta sección se compone de una reflexión acerca del enfoque dinámico como un acercamiento hacia considerar las funciones como una herramienta de modelización para el estudio del cambio, ahondando en aspectos cómo *¿qué significa hablar de un enfoque dinámico?, ¿qué es la variación y por qué es importante profundizar en ella?* y *¿qué rol juegan las representaciones en el estudio de los fenómenos de cambio?*

Se considera de relevancia, también, profundizar con las y los estudiantes respecto de qué es lo que caracteriza a los fenómenos lineales. Desde el segundo ciclo de primaria se aborda qué condiciones se requieren para que una situación sea de proporcionalidad directa:

> El avance supone que los niños puedan pasar de un uso implícito de sus propiedades a poder explicitarlas y **reconocer qué situaciones implican relaciones de proporcionalidad y cuáles no**. (GCABA, 2019a, p. 36)

Debido a que el estudio de la función lineal suele ser precedido por el estudio de fenómenos de proporcionalidad directa, es común que las y los estudiantes asuman que solo las relaciones de proporcionalidad directa del tipo $y = mx$ tienen un comportamiento lineal, sin considerar aquellas cuya representación algebraica es del tipo $y = mx + b$ (con b distinto de 0). Por eso, en el segundo apartado profundizaremos en la distinción entre estos dos comportamientos con la intención de evidenciar su diferencia y, por ende, las estructuras que subyacen a ellos. Asimismo, se invita a las y los lectores a revisar el material de proporcionalidad directa de esta misma colección.

Se considera indispensable que asumamos que las y los estudiantes pueden trabajar con relaciones funcionales y comportamientos lineales aun si las expresiones algebraicas de estos no son explícitas. En un estudio realizado con estudiantes de secundaria por Grueso (2019) se identificó que:

> Algunos estudiantes llegaron a reconocer que, para esbozar una gráfica, no necesariamente se debe tener una expresión algebraica que la soporte predeterminadamente. Esto se evidenció cuando ellos esbozaban la forma de la curva dependiendo del comportamiento de los cambios de una variable respecto de la otra, en términos de la coordinación cualitativa y cuantitativa de las cantidades involucradas. (p. 7)

Las tareas a las que alude se fundamentan en el razonamiento covariacional, que es entendido como un conjunto de actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. En relación con esto, el documento curricular de secundaria menciona que:

> La resolución de problemas vinculados a procesos a partir de las representaciones gráficas precederá cualquier definición formal del concepto de función.
> Los gráficos permiten manipular ciertas ideas referidas a conceptos que no están completamente definidos (por ejemplo, la noción de crecimiento, extremos, etc.) y pueden dar lugar a un análisis cualitativo de los procesos que representan. (GCABA, 2015, p. 517)

Por ello, profundizaremos en esta sección en los aspectos dinámicos desde lo cualitativo hasta lo simbólico, considerando el estudio de las representaciones y los diferentes enfoques teóricos que estudian los fenómenos del cambio.

3.2.1. Estudio del cambio desde un enfoque dinámico

Como se mencionó anteriormente, la literatura en torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función sugiere que, contrariamente a la tradición de iniciar a través de las definiciones conjuntistas y formales de la noción de función, se propicie un estudio dinámico de la relación entre variables. En ese sentido, GCABA (2015) propone "una aproximación al estudio de funciones sin 'pasar' por relaciones entre conjuntos finitos, privilegiando una entrada a partir de la interpretación y producción de gráficos como soporte para estudiar el comportamiento de las variables en juego" (p. 517), donde el estudio de las representaciones gráficas es fundamental para desarrollar ideas de movimiento, cambio y variación propias de los fenómenos modelados por funciones.

En ese sentido, es importante aclarar que, desde la perspectiva de esta propuesta, cuando hablamos de las funciones como herramientas para modelar fenómenos de cambio, nos referimos a la actividad de modelización matemática, la cual supone la toma de múltiples decisiones, como cuáles son las relaciones relevantes sobre las que se va a operar, los símbolos que se van a utilizar para representarlas, los elementos en los que se apoyará para aceptar la razonabilidad del modelo que se está usando, las propiedades que justifican las operaciones que se realicen, y cómo interpretar los resultados de esas operaciones en el problema (Sadovsky, 2005 como se citó en GCABA, 2015).

Por ello, más adelante ampliamos nuestro acercamiento desde el nivel primario en 5.° grado hasta el 2.° año de nivel secundaria, ya que el estudio del cambio desde este enfoque dinámico no puede reducirse a la representación gráfica de fenómenos, sino, en general, a los procesos de argumentación de una situación en la que existe variación. En esta misma línea, en el *Diseño Curricular para la Escuela Primaria* (2012), se menciona que introducir una aproximación a las funciones lineales en el segundo ciclo tiene como objetivo no limitar el estudio de lo funcional a las situaciones directa o inversamente proporcionales, alimentando en los niños y las niñas la idea de que todos los procesos responden a uno u otro modelo (GCABA, 2012).

Por eso, en esta propuesta hemos optado por un enfoque dinámico centrado en la idea de variación, la cual puede existir en una diversidad de fenómenos intra- y extramatemáticos, que van desde las relaciones aritméticas hasta fenómenos de la vida cotidiana. Además, el documento *Progresiones de los aprendizajes* para secundaria, sugiere que:

> La entrada a las funciones que se plantea en el Diseño Curricular se basa en el análisis y en la producción de gráficos cartesianos, y no en una perspectiva conjuntista. En un comienzo, el foco está puesto en *comprender que se trata de una relación entre variables*, de modo que un cambio en una de ellas produce un cambio en la otra. El propósito es que los estudiantes *desarrollen una mirada tanto de lo puntual (una interpretación punto a punto del gráfico) como de lo global (características generales relacionadas con la curvatura o no, el crecimiento, etc.)* [énfasis agregado], según resulte conveniente. (GCABA, 2020, p. 66)

Para profundizar en lo anterior, se consideran tres líneas importantes de estudios realizados en torno al aprendizaje y la enseñanza del concepto de función: el estudio de las representaciones (tabular, gráfica, algebraica, etc.), el razonamiento covariacional y el pensamiento variacional.

a. Estudio de las representaciones semióticas

Diversas investigaciones señalan la importancia de provocar que las y los estudiantes transiten por las diferentes representaciones de la función lineal, pues indican que, de esta forma, se reconoce, percibe y caracteriza la variación, considerando diferentes contextos y fenómenos para modelarlos, describirlos y representarlos mediante diferentes registros semióticos, los cuales pueden involucrar el lenguaje natural, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

En esta propuesta, al considerar la función lineal como un caso particular de la práctica de modelización mediante funciones, atenderemos a las formas en las que se reconoce, percibe y caracteriza la variación en diferentes escenarios, desde los aritméticos hasta los fenómenos físicos y del contexto cotidiano.

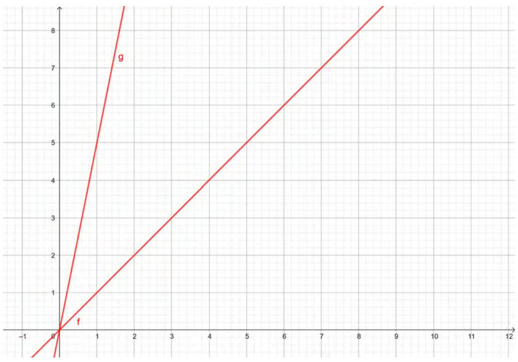
De manera introductoria, el estudio de las representaciones parte de la búsqueda de regularidades a través de la representación numérica; en ese sentido, el razonamiento cuantitativo involucra el uso de números para representar las cantidades y las relaciones entre ellas (Thompson, 1993) y es considerado previo al razonamiento covariacional (que se explica más adelante).

Por otro lado, el entendimiento de la noción de función está vinculado con el uso, identificación, conversión y coordinación de las representaciones escrita o verbal, algebraica, gráfica, tabular (numérica) y pictórica (Hitt, 1998), de tal forma que puede tenerse un acercamiento funcional desde las relaciones numéricas, que más adelante profundizaremos para el caso de los elementos de la división. Así, la transición entre las diferentes representaciones permite que las y los estudiantes reflexionen sobre las implicaciones de la situación de variación en su representación y viceversa; dada una representación, ¿cómo debería comportarse la situación representada? Esto requiere de la coordinación entre diferentes registros de representación y, para el caso de la función lineal, Córdoba *et al.* (2015) han identificado que:

> (...) los errores en la coordinación de los registros se observan tanto en la noción de pendiente como en la de ordenada al origen. Si bien se había previsto la dificultad de los alumnos en conectar el parámetro "a" de la expresión y $f(x) = ax + b$ con la inclinación de la recta, resultó un tanto sorpresivo que los problemas de articulación se manifestaran también, en un porcentaje similar, con respecto al concepto de ordenada al origen. (p. 35)

Esto quiere decir que no basta con tener una diversidad de representaciones, sino que es importante coordinarlas de manera que puedan inferirse las implicaciones entre ellas, es decir, que las y los estudiantes reconozcan que, en la gráfica de una función lineal $f(x) = ax + b$, el parámetro a implica un cambio en la inclinación de la gráfica, mientras que el parámetro b refiere a una traslación en el plano.

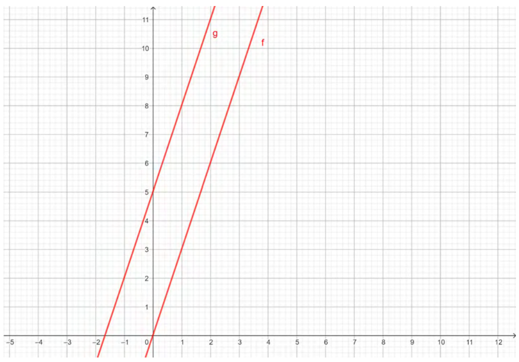
Imagen 35. Ejemplos de las formas de representar transformaciones gráficas de la función lineal según la variación de los parámetros a y b



Las funciones *f* y *g* refieren a:

$f(x) = x$
$g(x) = 5x$

Así, una forma de *hacer que g* se convierta en *f*, implicaría una rotación sobre el origen, lo que se traduce en el factor "5".



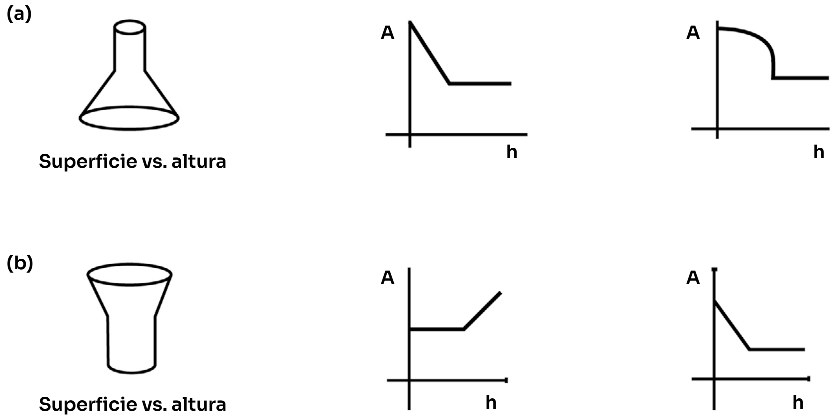
Las funciones *f* y *g* , refieren a:

$f(x) = 3x$
$g(x) = 3x + 5$

Así, una forma de *hacer que g* se convierta en *f*, implicaría un corrimiento de la gráfica sobre el plano, lo que se traduce en el término "+5".

Adicionalmente, en este tratamiento debemos advertir una dificultad más, que tiene que ver con la relación existente entre la forma de la representación gráfica y la forma del fenómeno representado (representación pictórica). Respecto a esto, Hitt (1998) identificó que, en una serie de tareas en las que, dado un recipiente, se pregunta por el comportamiento de su llenado con una sustancia a flujo constante, las y los estudiantes suelen trasladar la forma del fenómeno a la forma de su representación gráfica (la representación icónica a la representación gráfica).

Imagen 36. Distinción entre la forma de la representación gráfica y la forma del fenómeno (adaptado de Hitt, 1998)

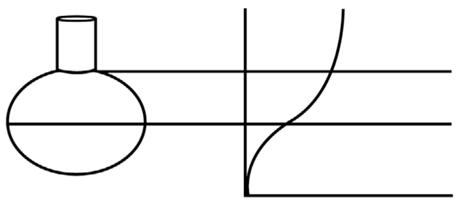


Así, desde la literatura, el trabajo con las representaciones semióticas se presenta como un indicador de la comprensión del concepto, las relaciones entre las variables y las implicaciones de los cambios entre ellas, lo cual transita desde la exploración de las relaciones entre cantidades (representación numérica y tabular), pasando por las formas gráficas y las de las situaciones estudiadas (representación pictórica y gráfica), hasta el estudio de los efectos de las condiciones de las situaciones estudiadas en sus representaciones simbólicas y viceversa (representación algebraica y gráfica), lo cual lleva a un estudio coordinado de los diferentes registros de representación.

b. Razonamiento covariacional

Como se mencionó anteriormente, el estudio de las funciones requiere del análisis coordinado de las variables involucradas en un fenómeno de cambio, por lo que la noción de razón de cambio resulta fundamental. Dentro de la literatura se ha demostrado que una comprensión madura del concepto de razón involucra la interpretación del cambio en alguna cantidad, la coordinación de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades, por ejemplo, a través de una gráfica (Carlson *et al*., 2003). Un ejemplo de ello es la gráfica del comportamiento del llenado de un recipiente a flujo constante, pues en ella se expresa cómo, en la medida en que transcurre el tiempo, aumenta la altura del agua dentro del recipiente (ver **Imagen 37**).

Imagen 37. Representación gráfica del comportamiento de llenado de un recipiente a flujo constante



Si este fenómeno se analiza para un recipiente cilíndrico, la gráfica resultante es justamente la de una función lineal, puesto que la forma del recipiente es regular (este ejemplo se profundiza en el apartado “Pensamiento y lenguaje variacional”).

Otro ejemplo de esta idea se encuentra en la **actividad 3** del apartado "Función lineal" de la serie *Estudiar y aprender* de 2.° año de secundaria.

Imagen 38. "Función lineal", *Estudiar y aprender. 2.° año. Tomo 2* (GCABA, 2021d, p. 21)

Actividad 3

Se desea llenar una pileta chica de lona con una manguera. En el momento de abrir la canilla, la pileta ya contiene algo de agua. Se sabe que, durante el llenado, el agua sale a un ritmo constante de 3 litros por minuto.

En la siguiente tabla se registraron algunos volúmenes de agua contenidos en la pileta en distintos tiempos medidos a partir de la apertura de la canilla.

Tiempo (minutos)	5	7	8	9	
Volumen de agua (litros)			34		46

a. Completá la tabla que relaciona el volumen de agua que tiene la pileta en función del tiempo desde que se abrió la canilla.
b. ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta antes de abrir la canilla?
c. Si la pileta tiene una capacidad de 490 litros, ¿cuánto tiempo tardó en llenarse?
d. Para cada uno de los siguientes gráficos, decidí si puede corresponder a la situación estudiada o no, y explicá por qué.

Gráfico 1

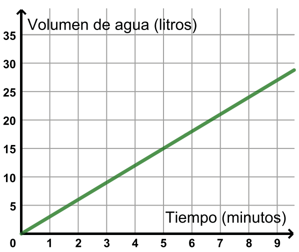


Gráfico 2

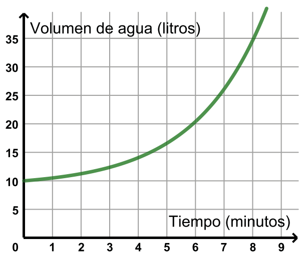
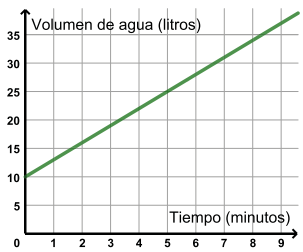


Gráfico 3



En el **inciso d**, donde se pregunta por el gráfico que representa dicho fenómeno, se puede considerar la siguiente estrategia.

> Se informa que, al momento de iniciar el llenado de la pileta, esta *ya contenía algo de agua*; por lo tanto, el punto correspondiente al tiempo 0 *no puede encontrarse en 0 litros*. En otras palabras, la línea que proporciona la información de la cantidad de agua en la pileta no puede partir desde el origen del plano cartesiano. Esto descarta inmediatamente el gráfico 1.
>
> Además, se afirma que la pileta es llenada a ritmo constante, *por lo que la línea que modela la situación debe ser necesariamente una recta, ya que la variación de las magnitudes es constante*. Así, entre el gráfico 2 y el gráfico 3, el que modela la situación de manera correcta es el gráfico 3.

De modo que se trata de considerar coordinadamente el cambio entre el tiempo como cantidad continua y el volumen de agua, además de interpretar el significado de los diferentes parámetros de la gráfica en función del contexto analizado.

Por ello, desde el razonamiento covariacional se proponen cinco niveles como indicadores de su desarrollo a partir de acciones mentales.

- Coordinación de valores: una variable cambia en función del cambio de la otra variable.
- Reconocimiento de la dirección del cambio: tipo de relación, creciente, decreciente, constante, etc.

- Coordinación cuantitativa para el estudio de la cantidad de cambio: análisis de la relación "cambio en *x* respecto al cambio en *y*".
- Reconocimiento de la razón promedio de cambio de una variable.
- Reconocimiento de la razón de cambio instantánea de una variable.

Para el caso del nivel secundario, el reconocimiento de la razón de cambio instantánea se considera de manera cualitativa, es decir, provocando que las y los estudiantes identifiquen que el fenómeno o situación analizada refiere a magnitudes continuas cuyos cambios pueden estudiarse tan detalladamente como sea deseable. Por eso, se debe resaltar que los puntos en el plano cartesiano representan relaciones entre magnitudes y que, a su vez, la comparación de dos puntos da cuenta del cambio que, relacionado con otros de la misma gráfica, es evidencia del estudio de la variación.

c. Pensamiento y lenguaje variacional

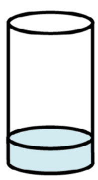
Como hemos visto, la enseñanza y el aprendizaje de la noción de función (particularmente la función lineal) involucra el estudio de fenómenos de cambio y, en el caso de esta aproximación, se busca el reconocimiento del carácter estable del cambio a través de preguntas como *¿qué cambia?*, *¿respecto de qué cambia?*, *¿cómo cambia?* y *¿cuánto cambia?* En un fenómeno de cambio pueden existir diversos elementos que cambian simultáneamente (*¿qué cambia?*). Sin embargo, para su estudio se consideran solo determinadas variables, lo que requiere de algún referente para comparar los estados del fenómeno, a fin de dar cuenta de que ocurrió un cambio, es decir, atender al cuestionamiento *¿respecto de qué cambia?*

Los primeros dos cuestionamientos se refieren a la identificación y el establecimiento de relaciones de dependencia entre variables; los otros consisten en describir la forma en que se relacionan las variables y caracterizar la naturaleza del cambio. La pregunta *¿cuánto cambia?* está orientada a asignar un valor a la modificación de estado percibida, mientras que la pregunta *¿cómo cambia?* está orientada a describir el comportamiento global. Ambas preguntas pueden realizarse en términos de valores numéricos o a través de descripciones cualitativas, por ejemplo, más grande que, menor que, más frío, menos frío, cada vez más rápido, cada vez más lento, etc. (Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017).

Estas ideas se acompañan del desarrollo de una serie de prácticas matemáticas como la comparación, la seriación, la estimación y la predicción, las cuales han sido documentadas como prácticas variacionales. Un ejemplo de esto se encuentra en el estudio de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017), donde se propone la siguiente tarea.

Imagen 39. Ejemplo de actividad para movilizar las prácticas variacionales de comparación, seriación, estimación y predicción (recuperada de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017)

Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo.



1. Marcá sobre la imagen la altura que alcanzará el agua a los 3 segundos.
2. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justificá tu respuesta.
3. Realizá el bosquejo de la gráfica que muestra la altura del líquido al paso del tiempo. Considerá que el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la altura. Explicá cómo es el crecimiento de la altura en este recipiente.

Si bien la situación en la que se plantea la tarea es similar a la de la sección anterior, observemos que el objetivo de esta involucra aspectos predictivos (*¿cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente?)* y no solo de representación. Para atender la pregunta se requiere de una estrategia que considere, en primer lugar, el reconocimiento de la naturaleza de las variables involucradas (se trata de un fenómeno de cambio); luego, el estado inicial como elemento de referencia (altura que alcanza el agua en los primeros 3 segundos) que propicie la comparación entre estados consecutivos (seriación) y, finalmente, la predicción del tiempo que tardará en llenarse el recipiente.

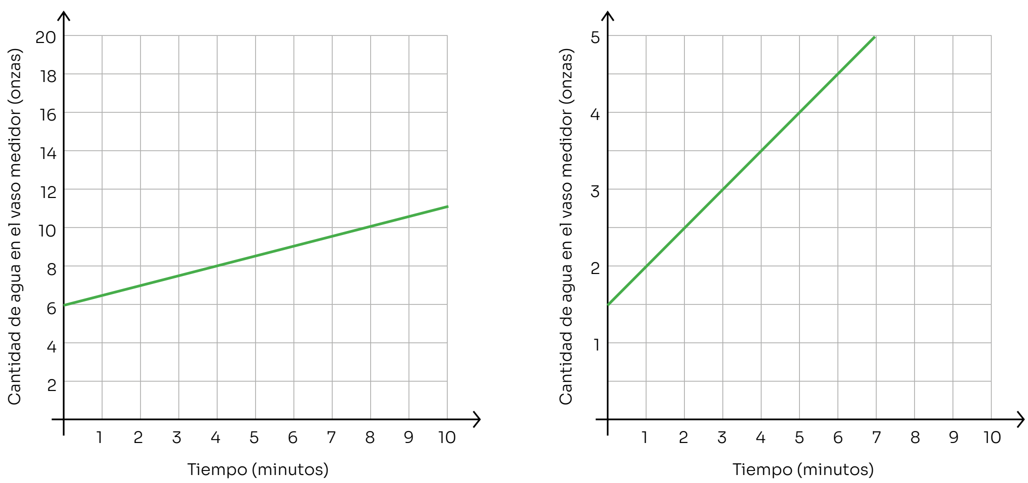
Se asume, entonces, que el abordaje desde esta línea se caracteriza por el desarrollo de la predicción como una práctica matemática y coloca a las funciones como un modelo para ello.

3.2.2. De la proporcionalidad directa a la función lineal: razón de cambio constante y variación lineal

Como se mencionó al inicio del apartado 3.2, la enseñanza del concepto de función lineal suele ser precedida por el estudio de las situaciones de proporcionalidad directa y, por eso, dentro del marco curricular de secundaria, se busca hacer una distinción entre ellas, asumiendo que "*la proporcionalidad directa será estudiada como caso particular de la función lineal* [énfasis agregado]. Se trabajarán diferentes situaciones de proporcionalidad directa en las que se vinculan magnitudes de la misma naturaleza (escalas, porcentajes) y de diferente naturaleza (densidad, velocidad, etc.)" (GCABA, 2015, p. 517).

De esta distinción se desprende una reflexión referente a dos nociones importantes relacionadas con el estudio de la función lineal: pendiente e inclinación de la recta. Uno de los conflictos propiciados por no introducir la función desde una mirada dinámica tiene que ver con asumir que la inclinación y la pendiente de la recta son equivalentes, lo cual no es correcto, como se observa en el siguiente ejemplo estudiado por Lobato y Thanheiser (2002).

Imagen 40. Ejemplo de la dificultad asociada a la no diferenciación entre inclinación de la recta y su pendiente (adaptado de Lobato y Thanheiser, 2002)



En este caso, ambas gráficas representan relaciones en las que la pendiente es la misma, mientras que la inclinación de la recta es diferente. Por eso, dentro del estudio de fenómenos de cambio, se parte del análisis de la variación como producto del cambio simultáneo entre magnitudes y no desde el aspecto visual de la representación gráfica. De acuerdo con Lobato y Thanheiser (2002):

> Esta dificultad puede resolverse estipulando que la pendiente es una medida de la inclinación de las líneas dentro del mismo sistema de escalas. Sin embargo, esto plantea la cuestión de si el objetivo principal del cálculo de la pendiente es obtener una medida de la inclinación de una línea *o bien la cuantificación de la relación existente entre las variables* [énfasis agregado]. (p. 163)

Esto sugiere que, tratándose de la función lineal, es importante el análisis de la pendiente como una razón de cambio y no solo como una cualidad de la gráfica. Recordemos que, desde el razonamiento covariacional, la noción de variación como una coordinación de variables es crucial para el desarrollo de una comprensión más profunda de la función lineal. En ese sentido, desde la propuesta curricular para secundaria:

> Se propone el estudio de la propiedad fundamental de las funciones lineales (Dy/Dx = constante) como característica de la forma "recta". *El concepto de pendiente requiere un trabajo en tres niveles* [énfasis agregado]*:*
> 1. ¿Cómo y dónde aparece en la fórmula de las funciones?
> 2. ¿Qué relación tiene con el aspecto del dibujo de la recta (es una medida de la inclinación de la misma)?
> 3. ¿Cuál es el sentido que adquiere en cada uno de los contextos de los problemas modelizados con funciones lineales? (GCABA, 2015, p. 523)

Así que, si bien el concepto de pendiente se relaciona con la inclinación de la recta, se asume que esta caracterización no es suficiente para la conceptualización de la variación lineal.

3.3. Problematización de la matemática escolar

Este apartado evidencia las ideas fuerza que pretendemos movilizar de manera transversal en el sistema educativo para desarrollar el pensamiento variacional, en particular, el que se refiere a la función lineal.

A partir de los apartados previos, proponemos tres aspectos centrales para el trabajo con las funciones lineales.

- El estudio de las funciones, para modelar situaciones de variación, requiere de un **enfoque dinámico**. Este acercamiento es igualmente necesario para el tratamiento de la función lineal y se caracteriza por:
  - Propiciar el estudio de situaciones en donde se analice el **comportamiento de cantidades variables y sus relaciones**, aun si no se llega a expresiones algebraicas. Esto nos permite iniciar su estudio desde edades tempranas, como 5.° grado de primaria, mediante relaciones aritméticas, privilegiando el enfoque en el cambio y su cuantificación.
  - Fomentar el **estudio de la variación simultánea entre dos cantidades** a través de cualquiera de sus representaciones (lenguaje natural, tablas, gráficas y expresiones algebraicas). Para ello, asumimos la **variación** como el producto de la cuantificación y análisis del cambio, ya sea en situaciones contextuales de la vida cotidiana o en las relaciones numéricas dentro de la aritmética.

Así, desde este enfoque, buscamos profundizar en la **búsqueda de regularidades, la producción de fórmulas** y el estudio de la **variación uniforme**, ya sea desde el análisis cuantitativo de relaciones numéricas (para el caso de primaria) o bien desde el estudio de situaciones de cambio (para primaria y secundaria). Cabe mencionar que es en el nivel secundario donde estas ideas se profundizan de manera simbólica a través del estudio de situaciones contextuales y sus diferentes representaciones.

- El trabajo con la **articulación de representaciones** de la función lineal $f(x) = ax + b$ profundizará en las implicaciones del cambio en los parámetros a y b **a través de la variación**.
  - Un cambio en el parámetro a involucra una **rotación de la gráfica** de f o bien una **modificación en la razón de cambio** entre las variables.
  - Un cambio en el parámetro b involucra una traslación de la gráfica de f o bien una **modificación en las condiciones iniciales** de la situación estudiada. Esto precisa que se considere que la representación gráfica de una situación de proporcionalidad directa es, en realidad, un caso particular de las situaciones lineales.

  Este tratamiento se acompaña de preguntas analíticas relacionadas con el estudio del cambio, como *¿qué está cambiando?* y *¿respecto de qué está cambiando?*, que son propias del estudio de fenómenos del cambio y son necesarias para reconocer su carácter estable.

De ahí que este acercamiento nos permitirá profundizar en la **interpretación de parámetros**, la **articulación de representaciones** y la **modelización de fenómenos lineales**, pues dichos parámetros deberán estudiarse en función de la situación modelada, recuperando sus elementos contextuales.

- Para el tratamiento con la función lineal, resulta necesaria **una transición entre la razón de cambio constante y la variación lineal**, para lo cual proponemos la articulación de dos acercamientos.
  - La **covariación** como estrategia para el análisis simultáneo del cambio en las variables y, con ello, el tránsito entre *la cuantificación del cambio* $\Delta y/\Delta x = a$ y *la variación instantánea* $dy/dx = a$ que, si bien no se aborda explícitamente en el nivel secundario, sí se estudia desde un nivel cualitativo a través de expresiones como *crece de manera constante*, *decrece de manera constante*, etc.
  - La **predicción** como carácter funcional del estudio de la función lineal, es decir, la búsqueda de modelos que nos permitan **estimar** o **anticipar** estados dentro de una situación de cambio. Para ello, proponemos la profundización en las preguntas *¿qué cambia?*, *¿cómo cambia?*, *¿respecto de qué cambia?* y *¿por qué cambia de esa manera?*

Finalmente, esta transición permitirá resignificar la noción de **proporcionalidad directa** y la cualidad de la función lineal como herramienta para la **modelización de fenómenos lineales**, lo cual forma parte del objetivo del currículo de secundaria (GCABA, 2015), que propone considerar a la función lineal como modelizadora de situaciones de crecimiento uniforme para la iniciación al estudio de la función lineal.

3.4. ¿Cómo operativizar las ideas fuerza?

Sobre la base de los materiales de *Estudiar y aprender* para primaria, *Estudiar y aprender* para secundaria, las secuencias didácticas de primaria, las secuencias didácticas de secundaria y lo abordado en los apartados anteriores sobre la ubicación curricular y la contextualización disciplinar, proponemos una manera de operativizar las ideas fuerza presentadas en el apartado anterior.

Estudiar y aprender para primaria
https://bit.ly/3SEMZwO

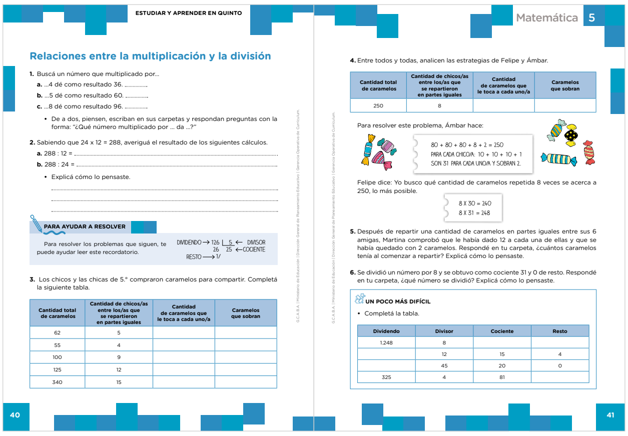
Estudiar y aprender para secundaria
https://bit.ly/49KhKqf

Secuencias didácticas de primaria
https://bit.ly/3T6Ku7e

Secuencias didácticas de secundaria
https://bit.ly/4bNJHPS

Aunque explícitamente las funciones lineales no son abordadas hasta el nivel secundario, es importante reconocer que el enfoque dinámico que se propone para su tratamiento inicia desde el estudio de regularidades en determinadas propiedades numéricas, ya que el estudio de la variación uniforme no es exclusivo del nivel secundaria. Por ello, iniciaremos con la reflexión en torno a cómo estas ideas pueden potenciarse desde el nivel primario y, a su vez, a cómo desarrollarlas de manera progresiva hasta el nivel secundario.

5.° grado

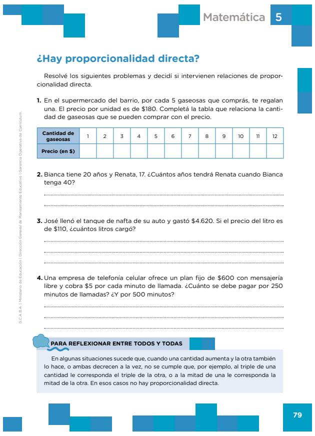

ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO
Relaciones entre la multiplicación y la división
Matemática 5
40
41

Estudio de regularidades, *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 40 y 41)
https://bit.ly/48k8Te5

En *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 40 y 41), para el tratamiento de las relaciones entre multiplicación y división, se explora la relación entre los diferentes elementos de la división (dividendo, divisor, cociente y resto) en una representación tabular. Si bien se trata de cantidades discretas, lo relevante de este tratamiento es, precisamente, el reconocimiento de regularidades cuando los elementos de la división cambian. Esto quiere decir que, aun si no se llega a la expresión $D = d \times c + r$, con $r < d$, sí es posible iniciar a la/el estudiante en el reconocimiento de cómo cambia el cociente si el dividendo aumenta o disminuye, cuánto debería aumentar o disminuir para que el resto sea 0 y qué se debería hacer para aumentar el cociente. Un ejemplo de este tipo de situaciones se puede encontrar en el material *Aproximar y optimizar* (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019), donde se cuestiona el comportamiento de los elementos de la división mediante una situación de medida.

Preguntas como las anteriores permiten que el/la estudiante reconozca la naturaleza dinámica de las cantidades involucradas, aun si no se presenta un modelo gráfico o algebraico. Además, el estudio de estas regularidades se mantiene desde 5.° hasta 7.° grado, por lo que es posible profundizar en su estudio de una manera dinámica a lo largo de esos tres años.

Por otro lado, en *Estudiar y aprender en Quinto* se abordan aspectos de la proporcionalidad directa y, particularmente en la sección “¿Hay proporcionalidad directa?”, se consideran una serie de situaciones en las que se requiere decidir si se trata de una situación de proporcionalidad directa o no.


Matemática 5

¿Hay proporcionalidad directa?

Resolvé los siguientes problemas y decidí si intervienen relaciones de proporcionalidad directa.

1. En el supermercado del barrio, por cada 5 gaseosas que comprás, te regalan una. El precio por unidad es de $180. Completá la tabla que relaciona la cantidad de gaseosas que se pueden comprar con el precio.

Cantidad de gaseosas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Precio (en $)												

2. Bianca tiene 20 años y Renata, 17. ¿Cuántos años tendrá Renata cuando Bianca tenga 40?

3. José llenó el tanque de nafta de su auto y gastó $4.620. Si el precio del litro es de $110, ¿cuántos litros cargó?

4. Una empresa de telefonía celular ofrece un plan fijo de $600 con mensajería libre y cobra $5 por cada minuto de llamada. ¿Cuánto se debe pagar por 250 minutos de llamadas? ¿Y por 500 minutos?

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

En algunas situaciones sucede que, cuando una cantidad aumenta y la otra también lo hace, o ambas decrecen a la vez, no se cumple que, por ejemplo, al triple de una cantidad le corresponda el triple de la otra, o a la mitad de una le corresponda la mitad de la otra. En esos casos no hay proporcionalidad directa.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

79

"¿Hay proporcionalidad directa?", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, p. 79) https://bit.ly/3uKmgX5

En ella, algunas de las situaciones, aunque no son de proporcionalidad directa, tienen la característica de mantener una razón de cambio constante, lo que se profundiza de la siguiente manera.

Imagen 41. "¿Hay proporcionalidad directa?", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, p. 79)

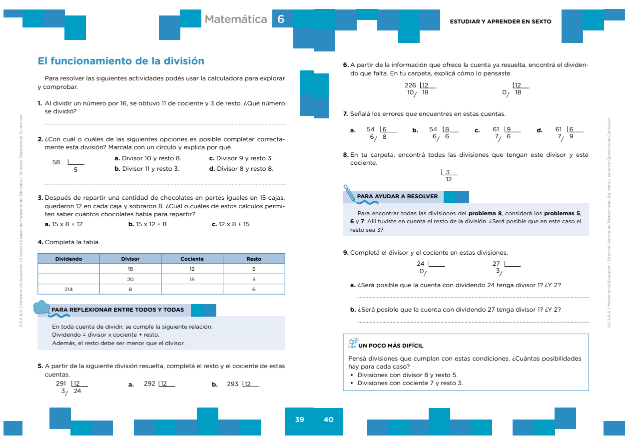
PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

En algunas situaciones sucede que, cuando una cantidad aumenta y la otra también lo hace, o ambas decrecen a la vez, no se cumple que, por ejemplo, al triple de una cantidad le corresponda el triple de la otra, o a la mitad de una le corresponda la mitad de la otra. En esos casos no hay proporcionalidad directa.

Esta reflexión se vuelve crucial en el nivel secundario, pues una situación puede ser lineal y no ser modelada por una relación de proporcionalidad directa, lo que corresponde al proceso de transición entre la razón de cambio constante y la variación lineal.

6.° grado

En *Estudiar y aprender en Sexto*, se profundiza en el estudio de las relaciones entre los elementos de la división, pasando del reconocimiento del cambio en las cantidades de manera tabular a una representación simbólica, como se puede apreciar en la página 40, en el estudio de "El funcionamiento de la división", lo que permite construir incluso un acercamiento a la producción de fórmulas desde el estudio de la variación lineal.


Matemática 6 — ESTUDIAR Y APRENDER EN SEXTO

El funcionamiento de la división

Para resolver las siguientes actividades podés usar la calculadora para explorar y comprobar.

1. Al dividir un número por 16, se obtuvo 11 de cociente y 3 de resto. ¿Qué número se dividió?

2. ¿Con cuál o cuáles de las siguientes opciones es posible completar correctamente esta división? Marcala con un círculo y explica por qué.

58 | ___ ; cociente 5

a. Divisor 10 y resto 8. **b.** Divisor 11 y resto 3. **c.** Divisor 9 y resto 3. **d.** Divisor 8 y resto 8.

3. Después de repartir una cantidad de chocolates en partes iguales en 15 cajas, quedaron 12 en cada caja y sobraron 8. ¿Cuál o cuáles de estos cálculos permiten saber cuántos chocolates había para repartir?

a. 15 x 8 + 12 **b.** 15 x 12 + 8 **c.** 12 x 8 + 15

4. Completá la tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
	18	12	5
	20	15	5
214	8		6

PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

En toda cuenta de dividir, se cumple la siguiente relación:
Dividendo = divisor x cociente + resto.
Además, el resto debe ser menor que el divisor.

5. A partir de la siguiente división resuelta, completá el resto y el cociente de estas cuentas.

291 | 12 ; 3 | 24 **a.** 292 | 12 **b.** 293 | 12

6. A partir de la información que ofrece la cuenta ya resuelta, encontrá el dividendo que falta. En tu carpeta, explicá cómo lo pensaste.

226 | 12 ; 10 | 18 ___ | 12 ; 0 | 18

7. Señalá los errores que encuentres en estas cuentas.

a. 54 | 6 ; 6 | 8 **b.** 54 | 8 ; 6 | 6 **c.** 61 | 9 ; 7 | 6 **d.** 61 | 6 ; 7 | 9

8. En tu carpeta, encontrá todas las divisiones que tengan este divisor y este cociente.

___ | 3 ; 12

PARA AYUDAR A RESOLVER

Para encontrar todas las divisiones del **problema 8**, considerá los **problemas 5**, **6** y **7**. Allí tuviste en cuenta el resto de la división. ¿Será posible que en este caso el resto sea 3?

9. Completá el divisor y el cociente en estas divisiones.

24 | ___ ; 0 27 | ___ ; 3

a. ¿Será posible que la cuenta con dividendo 24 tenga divisor 1? ¿Y 2?

b. ¿Será posible que la cuenta con dividendo 27 tenga divisor 1? ¿Y 2?

UN POCO MÁS DIFÍCIL

Pensá divisiones que cumplan con estas condiciones. ¿Cuántas posibilidades hay para cada caso?

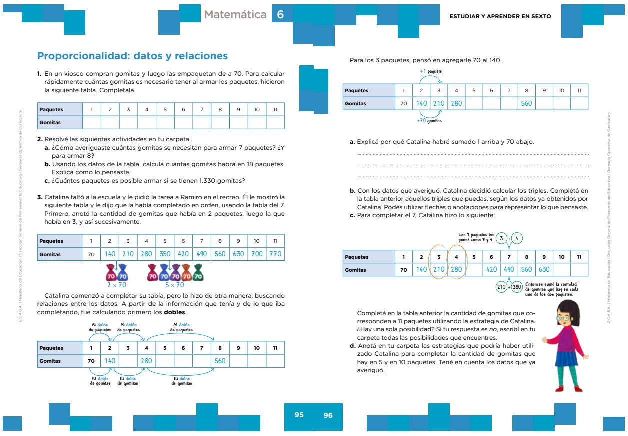
- Divisiones con divisor 8 y resto 5.
- Divisiones con cociente 7 y resto 3.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

39 40

Estudio de regularidades, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, pp. 39 y 40) https://bit.ly/48o4whZ

Adicionalmente, en el estudio de la proporcionalidad directa, dentro del apartado “Proporcionalidad: datos y relaciones” (GCABA, 2023e, pp. 95 y 96), se propone el estudio de una situación en la que se priorizan las relaciones entre cantidades como una estrategia para caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa.

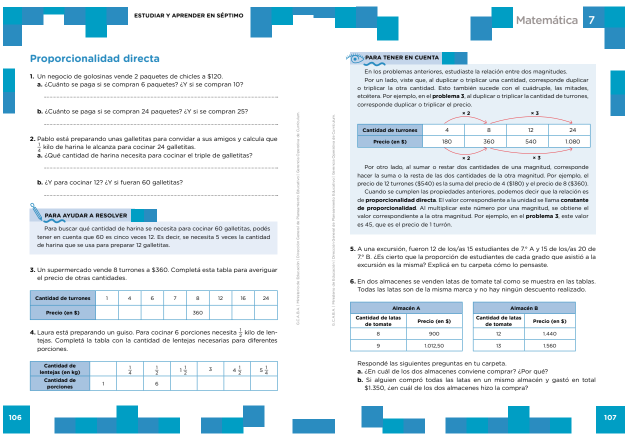


Proporcionalidad directa, *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, pp. 95 y 96) https://bit.ly/3I8boWc

En estas situaciones, se busca que el/la estudiante reconozca la constante de proporcionalidad como el valor que toma una de las magnitudes cuando la otra toma el valor de 1. Esta distinción es importante, puesto que se resignifica en el abordaje de la noción de razón de cambio, ya que se transita de un valor unitario a una cantidad invariante en el cambio de las magnitudes (lo cual es parte del enfoque dinámico para la introducción a la función lineal) y que, desde proporcionalidad, se estudia como unidad de medida.

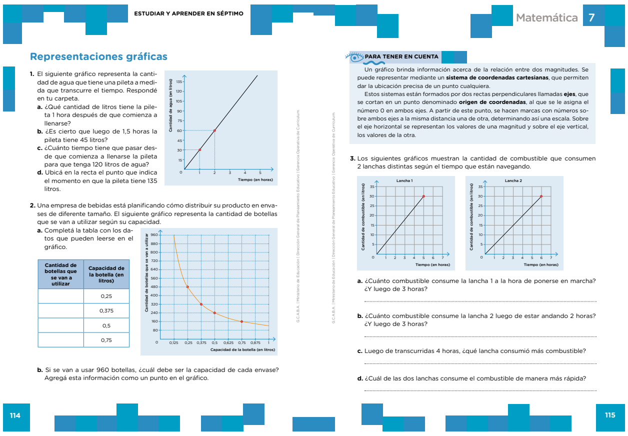
7.° grado

Continuando con el estudio de la proporcionalidad directa, en séptimo grado se aborda con mayor profundidad el estudio de la constante de proporcionalidad, haciendo explícito que dicha constante proviene del estudio de las relaciones entre las magnitudes. Este acercamiento tiene relación con el acercamiento desde la covariación mencionado en el apartado anterior, puesto que permite el estudio simultáneo y coordinado de las variables (la variable *y* aumenta en la misma medida que la variable *x*), aun si se realiza de manera aritmética.



“Proporcionalidad directa”, *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, pp. 106 y 107) https://bit.ly/4bFabDn

Por otro lado, en el trabajo con representaciones gráficas para proporcionalidad directa e inversa, se presentan situaciones cuya naturaleza es de variación continua, por lo que el estudio desde el enfoque dinámico emerge de manera natural (GCABA, 2023f, pp. 114 y 115).



ESTUDIAR Y APRENDER EN SÉPTIMO

Representaciones gráficas

1. El siguiente gráfico representa la cantidad de agua que tiene una pileta a medida que transcurre el tiempo. Respondé en tu carpeta.
   a. ¿Qué cantidad de litros tiene la pileta 1 hora después de que comienza a llenarse?
   b. ¿Es cierto que luego de 1,5 horas la pileta tiene 45 litros?
   c. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar desde que comienza a llenarse la pileta para que tenga 120 litros de agua?
   d. Ubicá en la recta el punto que indica el momento en que la pileta tiene 135 litros.

2. Una empresa de bebidas está planificando cómo distribuir su producto en envases de diferente tamaño. El siguiente gráfico representa la cantidad de botellas que se van a utilizar según su capacidad.
   a. Completá la tabla con los datos que pueden leerse en el gráfico.

Cantidad de botellas que se van a utilizar	Capacidad de la botella (en litros)
	0,25
	0,375
	0,5
	0,75

   b. Si se van a usar 960 botellas, ¿cuál debe ser la capacidad de cada envase? Agregá esta información como un punto en el gráfico.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum

114

Matemática 7

PARA TENER EN CUENTA

Un gráfico brinda información acerca de la relación entre dos magnitudes. Se puede representar mediante un **sistema de coordenadas cartesianas**, que permiten dar la ubicación precisa de un punto cualquiera.

Estos sistemas están formados por dos rectas perpendiculares llamadas **ejes**, que se cortan en un punto denominado **origen de coordenadas**, al que se le asigna el número 0 en ambos ejes. A partir de este punto, se hacen marcas con números sobre ambos ejes a la misma distancia una de otra, determinando así una escala. Sobre el eje horizontal se representan los valores de una magnitud y sobre el eje vertical, los valores de la otra.

3. Los siguientes gráficos muestran la cantidad de combustible que consumen 2 lanchas distintas según el tiempo que están navegando.

   a. ¿Cuánto combustible consume la lancha 1 a la hora de ponerse en marcha? ¿Y luego de 3 horas?
   b. ¿Cuánto combustible consume la lancha 2 luego de estar andando 2 horas? ¿Y luego de 3 horas?
   c. Luego de transcurridas 4 horas, ¿qué lancha consumió más combustible?
   d. ¿Cuál de las dos lanchas consume el combustible de manera más rápida?

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum

115

PDF

"Representaciones gráficas", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, pp. 114 y 115)
https://bit.ly/49zDdm4

En la **pregunta 1** se introduce al estudiantado en una lectura dinámica de la gráfica, es decir, en lugar de plantear preguntas del tipo *ubicá sobre la gráfica el par ordenado (1,30), describí qué significa el punto sobre la gráfica*, etc., se realizan preguntas en las que se prioriza la relación de dependencia entre las variables *tiempo* y *cantidad de agua*. Por ejemplo, atender la pregunta *¿cuánto tiempo tiene que pasar desde que comienza a llenarse la pileta para que tenga 120 litros de agua?* requiere primero reconocer que el llenado es uniforme y que el aumento de la variable *cantidad de agua* depende del paso del tiempo y que, si se toma una cantidad determinada (120 litros), la lectura del gráfico depende de su ubicación respecto al tiempo.

Una estrategia para explorar la naturaleza predictiva de la gráfica sería modificar levemente la **pregunta d** de la página 114.

Tabla 20. Sugerencia de modificación para la pregunta 1d de "Representaciones gráficas", *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, p. 114)

Pregunta original	Pregunta modificada
d. Ubicá en la recta el punto que indica el momento en que la pileta tiene 135 litros.	d. Si la forma de llenado no cambia y en la pileta caben 150 litros, ¿en cuántas horas se llenará?

Esto permitiría el reconocimiento de que no se necesita el resto de la gráfica para anticipar el momento en el que se llenará la pileta, sino que basta con reconocer cómo cambia la cantidad de agua respecto del tiempo, es decir, reconocer la razón de cambio, aun si esta no está definida propiamente.

Lo mismo sucede con la **consigna 3d**, "¿Cuál de las dos lanchas consume el combustible de manera más rápida?". Esta pregunta no solo alude de manera cualitativa a la razón de cambio, sino que permite que el/la estudiante pueda reconocer que dicha cualidad se relaciona con una característica de la gráfica, la pendiente. En este punto, conviene recuperar del apartado "3.2. Contextualización disciplinar", el argumento acerca de las nociones de inclinación, pendiente y razón de cambio, ya que, aunque en este caso la escala es la misma, puede reflexionarse con el estudiantado en torno a qué pasaría si la escala fuera diferente.

Hasta este punto, las ideas fuerza que se trabajan a nivel primario se refieren a elementos básicos del enfoque dinámico y las representaciones.

- La búsqueda de regularidades y la producción de fórmulas: en cantidades discretas como las de la división y el comportamiento de sus elementos (divisor, dividendo, cociente y resto).
- Las características esenciales de la proporcionalidad directa: en situaciones con cantidades discretas y de variación continua.

Estas mismas ideas se retoman en el material *Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria*. Para el primer punto, consideramos los **problemas 6 y 7** del apartado “Propiedades de la división”.

Imagen 42. Estudio de regularidades, *Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria* (GCABA, 2023g, p. 14)

Problema 6

En caso de que existan, hallá los siguientes números:

a. Un número que, al dividirlo por 17, tenga 14 de cociente y 9 de resto. ¿Existe? ¿Es único? ¿Cómo lo obtuviste?

b. Un número que, al dividirlo por 13, tenga 7 de cociente y 15 de resto. ¿Existe? ¿Es único? ¿Cómo lo pensaste?

c. Un número que, al ser dividido por 16, tenga resto 3. ¿Existe? ¿Es único? ¿Por qué?

Problema 7

Las siguientes divisiones están incompletas. Indicá cuántas cuentas distintas se pueden proponer en ambos casos.

? | 15
? 4

? | ?
15 4

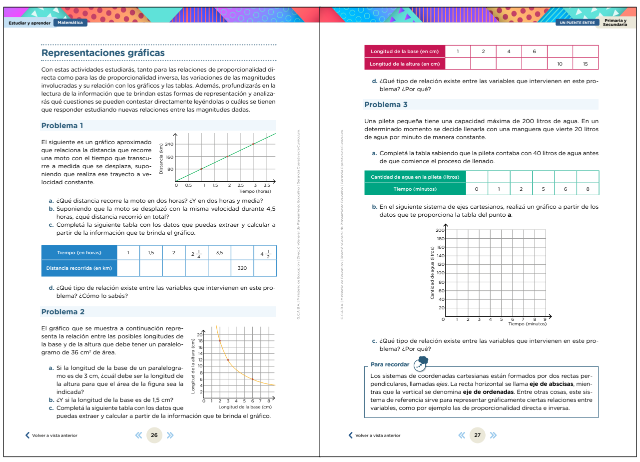
Para recordar

A partir de los números que intervienen en toda división, se puede escribir la siguiente relación: **dividendo (D) = divisor (d) × cociente (c) + resto (r)**. A esta relación se la llama algoritmo de la división. El resto tiene que ser siempre menor que el divisor. De esta forma, puede expresarse:

$$\mathbf{D = d \times c + r} \quad \text{y} \quad \mathbf{r < d}$$

Por ejemplo, en la segunda división del problema 7 de esta sección, puede proponerse como un caso posible: 95 = 20 × 4 + 15.

En estos problemas se considera la relación lineal existente entre los elementos de la división y su naturaleza variable. En este material, el acercamiento a la proporcionalidad directa desde su representación gráfica es desde situaciones de variación continua, como el movimiento o el llenado de una pileta.



“Representaciones gráficas”, *Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria* (GCABA, 2023g, pp. 26 y 27)
https://bit.ly/3VtNo7D

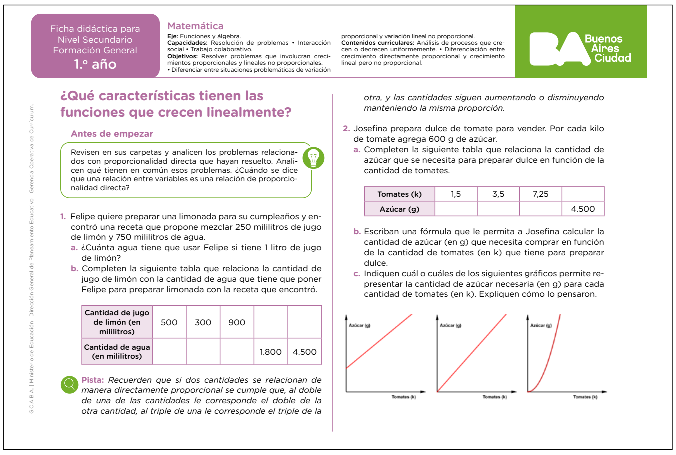
En el **problema 1b** ("Suponiendo que la moto se desplazó con la misma velocidad durante 4,5 horas, ¿qué distancia recorrió en total?") la pregunta es de naturaleza predictiva, puesto que requiere del análisis de los estados previos (comportamiento de la gráfica en diferentes momentos) para reconocer que la razón de cambio es constante y, por ende, plantear la estrategia adecuada para estimar la respuesta. Este es un ejemplo más de cómo es posible estudiar la relación de variables desde un enfoque dinámico sin necesidad de una definición ni de una expresión algebraica para el fenómeno estudiado. Para el caso del **problema 3**, el estudio de la relación entre variables logra un puente entre las nociones de razón de cambio constante y variación lineal, puesto que se asume que el llenado de la pileta se mantiene a flujo constante, aunque inicialmente la pileta ya contenía agua.

Esto lleva a la/el estudiante a reconocer que la estrategia de *al doble le toca el doble* ya no es válida, por lo que debe identificar que la condición inicial del fenómeno —cantidad de agua que ya tenía la pileta— resulta ser la ordenada al origen. Así pues, nuestra propuesta es aprovechar este tipo de situaciones para reflexionar con el estudiantado en torno a, por ejemplo, cómo la proporcionalidad directa es un caso particular de la variación lineal y las implicaciones que esto tiene en su representación gráfica, pues recordemos que el estudio de los parámetros es esencial dentro del enfoque dinámico que proponemos.

1.° año

Como se mencionó anteriormente, es en el nivel secundario donde se profundiza en la articulación entre las diferentes representaciones de la función, particularmente considerándola como una herramienta para la modelización de situaciones de variación uniforme en contextos extramatemáticos. Aunado a esto y de manera introductoria, el trabajo con las funciones lineales es precedido por el estudio de las relaciones proporcionales y, en ese sentido, una de las ideas centrales del currículo argentino es la distinción entre estos dos comportamientos: el de la proporcionalidad directa y el de la variación lineal.

Para el caso de la **actividad 1** (GCABA, s/f b, p. 1), si bien se plantea una situación de variación continua, el tratamiento se centra en que el estudiantado reconozca la constante de proporcionalidad. Una forma de ampliar la reflexión en torno a esta situación para convertirla en un análisis centrado en la razón de cambio podría ser planteando preguntas como *¿qué tendría que haber hecho Felipe para conservar el sabor de la mezcla si la jarra hubiese tenido inicialmente 500 ml de agua?* Para la **actividad 2**, una posible pregunta es *¿cómo sería la gráfica si Josefina usara más azúcar en la receta?, ¿se modificaría la fórmula?, ¿cómo?*



Ficha didáctica para Nivel Secundario Formación General 1.° año

Matemática

Eje: Funciones y álgebra.
Capacidades: Resolución de problemas • Interacción social • Trabajo colaborativo.
Objetivos: Resolver problemas que involucran crecimientos proporcionales y lineales no proporcionales. • Diferenciar entre situaciones problemáticas de variación proporcional y variación lineal no proporcional.
Contenidos curriculares: Análisis de procesos que crecen o decrecen uniformemente. • Diferenciación entre crecimiento directamente proporcional y crecimiento lineal pero no proporcional.

Buenos Aires Ciudad

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

¿Qué características tienen las funciones que crecen linealmente?

Antes de empezar

Revisen en sus carpetas y analicen los problemas relacionados con proporcionalidad directa que hayan resuelto. Analicen qué tienen en común esos problemas. ¿Cuándo se dice que una relación entre variables es una relación de proporcionalidad directa?

1. Felipe quiere preparar una limonada para su cumpleaños y encontró una receta que propone mezclar 250 mililitros de jugo de limón y 750 mililitros de agua.
   a. ¿Cuánta agua tiene que usar Felipe si tiene 1 litro de jugo de limón?
   b. Completen la siguiente tabla que relaciona la cantidad de jugo de limón con la cantidad de agua que tiene que poner Felipe para preparar limonada con la receta que encontró.

Cantidad de jugo de limón (en mililitros)	500	300	900		
Cantidad de agua (en mililitros)				1.800	4.500

Pista: *Recuerden que si dos cantidades se relacionan de manera directamente proporcional se cumple que, al doble de una de las cantidades le corresponde el doble de la otra cantidad, al triple de una le corresponde el triple de la otra, y las cantidades siguen aumentando o disminuyendo manteniendo la misma proporción.*

2. Josefina prepara dulce de tomate para vender. Por cada kilo de tomate agrega 600 g de azúcar.
   a. Completen la siguiente tabla que relaciona la cantidad de azúcar que se necesita para preparar dulce en función de la cantidad de tomates.

Tomates (k)	1,5	3,5	7,25	
Azúcar (g)				4.500

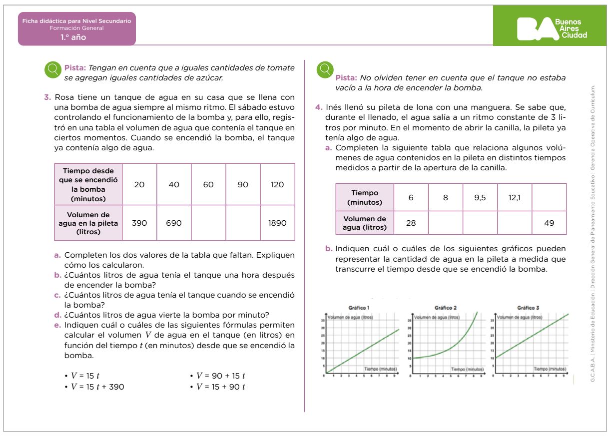
   b. Escriban una fórmula que le permita a Josefina calcular la cantidad de azúcar (en g) que necesita comprar en función de la cantidad de tomates (en k) que tiene para preparar dulce.
   c. Indiquen cuál o cuáles de los siguientes gráficos permite representar la cantidad de azúcar necesaria (en g) para cada cantidad de tomates (en k). Expliquen cómo lo pensaron.

¿Qué características tienen las funciones que crecen linealmente?, Ficha didáctica 1.° secundaria (GCABA, s/f b, p. 1)
https://bit.ly/49ILCUg

Lo anterior permitiría ahondar en la interpretación de los parámetros y las propiedades de la gráfica en función de la situación analizada, además de considerar la forma en que varían simultáneamente las variables *tomates* y *azúcar*.

Por otra parte, la **actividad 3** tiene como intencionalidad que el/la estudiante pueda, eventualmente, elaborar una función lineal de la forma $f(x) = ax + b$, por lo cual se plantea un problema en que el valor inicial es distinto de cero, es decir, la recta que modela la situación no intersecta al eje Y en el origen, por lo que la estrategia propiciada en la pista de la **actividad 1** resulta insuficiente.

En las **actividades 3 y 4** (GCABA, s/f b, p. 2), las expresiones “siempre el mismo ritmo”, “ritmo constante”, “ya contenía agua” permiten un primer acercamiento de corte cualitativo al estudio de la variación lineal. En ese sentido, la transición de las **actividades 1 y 2** a las **actividades 3 y 4** no refiere únicamente al hecho de que las condiciones iniciales son distintas de cero, sino a que las estrategias numéricas usadas (regla de tres simple, constante de proporcionalidad, reconocimiento del valor unitario) ya no son suficientes para responder las preguntas.



Ficha didáctica para Nivel Secundario
Formación General
1.° año

Buenos Aires Ciudad

Pista: *Tengan en cuenta que a iguales cantidades de tomate se agregan iguales cantidades de azúcar.*

3. Rosa tiene un tanque de agua en su casa que se llena con una bomba de agua siempre al mismo ritmo. El sábado estuvo controlando el funcionamiento de la bomba y, para ello, registró en una tabla el volumen de agua que contenía el tanque en ciertos momentos. Cuando se encendió la bomba, el tanque ya contenía algo de agua.

Tiempo desde que se encendió la bomba (minutos)	20	40	60	90	120
Volumen de agua en la pileta (litros)	390	690			1890

a. Completen los dos valores de la tabla que faltan. Expliquen cómo los calcularon.
b. ¿Cuántos litros de agua tenía el tanque una hora después de encender la bomba?
c. ¿Cuántos litros de agua tenía el tanque cuando se encendió la bomba?
d. ¿Cuántos litros de agua vierte la bomba por minuto?
e. Indiquen cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten calcular el volumen V de agua en el tanque (en litros) en función del tiempo t (en minutos) desde que se encendió la bomba.

- $V = 15\,t$
- $V = 15\,t + 390$
- $V = 90 + 15\,t$
- $V = 15 + 90\,t$

Pista: *No olviden tener en cuenta que el tanque no estaba vacío a la hora de encender la bomba.*

4. Inés llenó su pileta de lona con una manguera. Se sabe que, durante el llenado, el agua salía a un ritmo constante de 3 litros por minuto. En el momento de abrir la canilla, la pileta ya tenía algo de agua.

a. Completen la siguiente tabla que relaciona algunos volúmenes de agua contenidos en la pileta en distintos tiempos medidos a partir de la apertura de la canilla.

Tiempo (minutos)	6	8	9,5	12,1	
Volumen de agua (litros)	28				49

b. Indiquen cuál o cuáles de los siguientes gráficos pueden representar la cantidad de agua en la pileta a medida que transcurre el tiempo desde que se encendió la bomba.

¿Qué características tienen las funciones que crecen linealmente?, Ficha didáctica 1.° secundaria (GCABA, s/f b, p. 2)
https://bit.ly/42PedVn

Este cambio propicia el reconocimiento de la razón de cambio constante, necesaria para el estudio de la función lineal. Además, si se busca profundizar en el estudio de los parámetros y su articulación con la representación gráfica, sugerimos plantear preguntas como *¿cómo sería la gráfica si el ritmo de llenado hubiera sido de 6 litros por minuto?* y *¿qué habría pasado si la pileta no hubiese tenido agua inicialmente?* Esta última pregunta permite que sea explícito que la proporcionalidad directa es un caso particular de la función lineal.

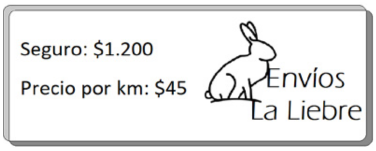
2.° año

Las actividades propuestas en el apartado “Función lineal” del texto *Estudiar y aprender* para 2.° de secundaria se han diseñado con la intención de reafirmar la idea de cambio constante. Sin embargo, se plantea dejar de lado la idea de *al doble le toca el doble* en las magnitudes, profundizando en la variación de dichas magnitudes, ya que la idea de razón de cambio constante es indiferente a si la función lineal es proporcional o no proporcional.

Imagen 43. “Función lineal”, *Estudiar y aprender. 2.° año. Tomo 2* (GCABA, 2021d, p. 20)

Actividad 1

Abril vende artículos por internet y contrata la empresa La Liebre para hacer envíos al interior. La empresa ofrece la siguiente promoción:



El costo del traslado queda a cargo del comprador.

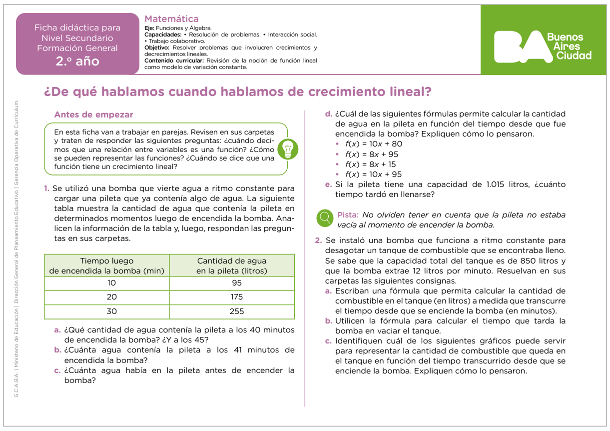
a. Abril tiene que enviar un pedido a Chascomús, que queda a 85 km de su empresa. ¿Cuánto debe abonar el cliente para el servicio de traslado?

b. Si tiene que enviar un pedido a 350 km de su empresa. ¿Cuánto debe abonar el cliente para el servicio de traslado?

c. Si un cliente debe abonar $23.700 por el servicio de traslado, ¿a qué distancia de la empresa de Abril se encuentra?

En esta actividad, se busca que el/la estudiante determine cómo cambian las variables involucradas en la situación y cuál de ellas corresponde a un gasto fijo o constante, además de cuál corresponde a un gasto variable, reconociendo la razón de cambio constante en la situación.

Para dar continuidad y profundización al trabajo en el libro de texto, en la ficha didáctica para 2.° de secundaria se propone un acercamiento dinámico desde el estudio de las relaciones entre variables (GCABA, s/f c).


Ficha didáctica para Nivel Secundario Formación General
2.° año

Matemática
Eje: Funciones y Álgebra.
Capacidades: • Resolución de problemas. • Interacción social. • Trabajo colaborativo.
Objetivo: Resolver problemas que involucren crecimientos y decrecimientos lineales.
Contenido curricular: Revisión de la noción de función lineal como modelo de variación constante.

Buenos Aires Ciudad

¿De qué hablamos cuando hablamos de crecimiento lineal?

Antes de empezar

En esta ficha van a trabajar en parejas. Revisen en sus carpetas y traten de responder las siguientes preguntas: ¿cuándo decimos que una relación entre variables es una función? ¿Cómo se pueden representar las funciones? ¿Cuándo se dice que una función tiene un crecimiento lineal?

1. Se utilizó una bomba que vierte agua a ritmo constante para cargar una pileta que ya contenía algo de agua. La siguiente tabla muestra la cantidad de agua que contenía la pileta en determinados momentos luego de encendida la bomba. Analicen la información de la tabla y, luego, respondan las preguntas en sus carpetas.

Tiempo luego de encendida la bomba (min)	Cantidad de agua en la pileta (litros)
10	95
20	175
30	255

a. ¿Qué cantidad de agua contenía la pileta a los 40 minutos de encendida la bomba? ¿Y a los 45?
b. ¿Cuánta agua contenía la pileta a los 41 minutos de encendida la bomba?
c. ¿Cuánta agua había en la pileta antes de encender la bomba?
d. ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite calcular la cantidad de agua en la pileta en función del tiempo desde que fue encendida la bomba? Expliquen cómo lo pensaron.
- $f(x) = 10x + 80$
- $f(x) = 8x + 95$
- $f(x) = 8x + 15$
- $f(x) = 10x + 95$

e. Si la pileta tiene una capacidad de 1.015 litros, ¿cuánto tiempo tardó en llenarse?

Pista: *No olviden tener en cuenta que la pileta no estaba vacía al momento de encender la bomba.*

2. Se instaló una bomba que funciona a ritmo constante para desagotar un tanque de combustible que se encontraba lleno. Se sabe que la capacidad total del tanque es de 850 litros y que la bomba extrae 12 litros por minuto. Resuelvan en sus carpetas las siguientes consignas.
a. Escriban una fórmula que permita calcular la cantidad de combustible en el tanque (en litros) a medida que transcurre el tiempo desde que se enciende la bomba (en minutos).
b. Utilicen la fórmula para calcular el tiempo que tarda la bomba en vaciar el tanque.
c. Identifiquen cuál de los siguientes gráficos puede servir para representar la cantidad de combustible que queda en el tanque en función del tiempo transcurrido desde que se enciende la bomba. Expliquen cómo lo pensaron.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

PDF

¿De qué hablamos cuando hablamos de crecimiento lineal?, Ficha didáctica 2.° secundaria (GCABA, s/f c, p. 1)
https://bit.ly/4bFaWMJ

Si bien para segundo año de secundaria se retoma la misma situación del llenado de una pileta, el tratamiento es distinto, puesto que, en este caso, no se proporciona la razón de cambio, sino que se propicia su construcción como parte de la estrategia de respuesta, para lo cual resulta indispensable el estudio simultáneo de la relación entre las variables, es decir, su covariación (ver el apartado “3.2. Contextualización disciplinar”).

Además, la naturaleza predictiva de las funciones lineales no solo tiene que ver con el planteamiento de preguntas sobre estados futuros (**inciso e**), sino incluso sobre estados intermedios, con en el caso de los **incisos b y c**.

Por otro lado, en la **actividad 2** se busca resignificar el parámetro *a* de la función $f(x) = ax + b$ a partir del contexto de la actividad, pues se trata del desagote de un tanque con una bomba que extrae agua a un "ritmo constante" y una de las estrategias para su abordaje es la siguiente pista:

Imagen 44. *¿De qué hablamos cuando hablamos de crecimiento lineal?*, Ficha didáctica 2.° secundaria (GCABA, s/f c, p. 2)

> **Pista:** *Tengan en cuenta que el volumen de combustible en el tanque desciende a medida que pasa el tiempo transcurrido desde que se enciende la bomba.*

Este acercamiento a la interpretación de los parámetros puede ser reforzado por las preguntas propuestas desde el pensamiento y lenguaje variacional (ver el apartado "3.2. Contextualización disciplinar"): *¿qué cambia?*, *¿cómo cambia?*, *¿respecto de qué cambia?*, etc.

Finalmente, como nota dentro del texto *Estudiar y aprender* de 2.° año de secundaria se plantea una definición para la variación lineal o uniforme.

Imagen 45. Función lineal, *Estudiar y aprender. 2.° año. Tomo 2* (GCABA, 2021d, p. 22)

> **Para recordar**
> En las actividades anteriores estudiaste situaciones en las que la variación de la variable dependiente en función de la variable independiente es siempre constante, es decir, a cambios iguales de la variable independiente le corresponden cambios iguales de la variable dependiente. Por ejemplo:
> - En la **Actividad 3**, por cada minuto que transcurre desde que se abre la canilla, ingresan 3 litros de agua en la pileta. Cada dos minutos, ingresan 6 litros. Cada tres minutos, ingresan 9 litros, etc.
>
> A este tipo de variación se la llama **variación uniforme**.

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivo del año escolar	Introducir al estudio de las relaciones dinámicas entre cantidades variables.	Reconocer la existencia de relaciones de aumento constante pero no proporcionales.	Introducir de manera cualitativa al estudio de la variación lineal, sin llegar necesariamente a la simbolización correspondiente.	Consolidar el estudio de la variación lineal, pasando por su representación algebraica.
Ideas fuerza	• Para introducir al estudio de las relaciones desde un enfoque dinámico se propone la búsqueda de regularidades mediante el estudio de las representaciones.	• Para el reconocimiento de estas relaciones se plantean ejemplos varios de naturaleza lineal, tomando como punto de partida la proporcionalidad directa.	• Partir de la diferencia entre $(k = y/x)$ y $(dy/dx = k)$ para introducir la idea de variación uniforme. • Evidencias de que las estrategias aritméticas (regla de tres simple, valor unitario) no son suficientes para el estudio de la variación uniforme.	• Reconocer las implicaciones de los parámetros en las diferentes representaciones. • Identificar a las funciones lineales como herramientas de modelización de fenómenos lineales.
Preguntas clave	¿Qué y cómo cambia? ¿Por qué cambia de esa manera?	¿Qué sucede si la condición inicial del problema no es cero?	¿Qué se mantiene constante? ¿Qué sucede si la condición inicial es cero? (la proporcionalidad directa como caso particular de la variación lineal).	¿Qué pasa si el ritmo aumenta o disminuye? ¿Qué pasa si las condiciones iniciales cambian?
Materiales propuestos	• *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d) • *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e) • "Relaciones entre la multiplicación y la división" (GCABA, 2023d, p. 40) • "¿Hay proporcionalidad directa?" (GCABA, 2023d, p. 79) • "El funcionamiento de la división" (GCABA, 2023e, p. 39) • "Proporcionalidad: datos y relaciones" (GCABA, 2023e, p. 95)	• *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f) • *Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria* (GCABA, 2023a y 2023g) • "Proporcionalidad directa" (GCABA, 2023f, p. 106) • "Representaciones gráficas" (GCABA, 2023f, p. 114)	• *¿Qué características tienen las funciones que crecen linealmente?* Ficha didáctica 1.º de secundaria (GCABA, s/f b)	• *¿De qué hablamos cuando hablamos de crecimiento lineal?* Ficha didáctica 2.º de secundaria (GCABA, s/f c) • "Función lineal" (GCABA, 2021d, pp. 20-22)
Ideas involucradas en las actividades de *Estudiar y aprender*	• Naturaleza dinámica en el comportamiento de los elementos de la división. • Reconocimiento de situaciones de cambio constante que no son de proporcionalidad directa. • Proporcionalidad directa.	• Condiciones en los problemas de proporcionalidad directa. • Reconocimiento de la naturaleza predictiva de la gráfica. • Tratamiento de situaciones con cantidades discretas y continuas.	• Condiciones en los problemas de proporcionalidad directa. • Representación coloquial, tabular y gráfica para una misma situación. • Interpretación de parámetros en las representaciones gráfica y algebraica.	• Reconocimiento de relaciones de variación uniforme a través de la covariación. • Reconocimiento de la naturaleza predictiva y modelizadora de las gráficas de funciones lineales. • Interpretación de los parámetros de una función lineal.
Tipo de representaciones abordadas	Tabular.	Tabular y gráfica.	Tabular y gráfica.	Tabular, gráfica y algebraica.

Capítulo 4. Construcción de triángulos

4.1. Ubicación curricular

Se presentan los objetivos curriculares relativos al contenido de **construcción de triángulos** a lo largo del segundo ciclo de educación primaria y del ciclo básico de educación secundaria, extraídos de diferentes documentos curriculares del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Tabla 21. Síntesis de ubicación curricular para la construcción de triángulos

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivos curriculares	*Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* (2014) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)		*Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2ª ed., 2015) (selección de los contenidos que trabajaremos en este documento)	
	Tema: Geometría • Construir cuadrados, rectángulos, rombos y paralelogramos recurriendo a las propiedades relativas a sus lados y ángulos, y diagonales. (p. 126) • Participar de la producción de argumentos que fundamenten las propiedades mencionadas. (p. 126)	**Tema: Geometría** • Utilizar propiedades de cuadriláteros y triángulos para decidir la verdad o falsedad de una afirmación o determinar medidas de ángulos de figuras. (p. 127) • Participar de la elaboración de argumentos que fundamenten la validez del procedimiento de construcción apelando a propiedades. (p. 127)	• Comprender las construcciones como actividades que se planifican, apoyándose en propiedades de las figuras. • Identificar cuándo una colección de datos determina unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros con regla y compás, y cuándo la construcción es imposible. • Recurrir a criterios de igualdad de triángulos y a las relaciones de ángulos entre paralelas para resolver diversos tipos de problemas. Enunciar afirmaciones y validarlas o descartarlas, apoyándose en los conocimientos construidos. (p. 514)	
Alcances planteados desde la propuesta actual	• Construcción de triángulos a partir de diferentes informaciones, usando diferentes instrumentos de geometría.	• Construcción de triángulos a partir de diferentes informaciones, analizando si es posible realizar o no la construcción de la figura, si es única o si se pueden construir diferentes.	• Dominio del uso de instrumentos y de diferentes propiedades que permitan justificar la construcción. • Producción de nuevas propiedades de las figuras, necesarias para argumentaciones posteriores. • Construcción de los criterios de congruencia de triángulos. • Identificación de la existencia y unicidad en los distintos casos de congruencia, se esperan justificaciones que se apoyen en la visualización.	

Unidad de análisis	Primaria	Secundaria
Progresiones Ideas principales	**Eje. Circunferencias, círculos, ángulos y triángulos** • Construcción de triángulos a partir de las medidas de sus lados y de sus ángulos. • Propiedad triangular (desigualdad triangular). • Conjetura de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo (180°). • Resolución de problemas que ponen en juego la propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo. **Eje. Cuadrilátero y polígonos regulares** • Construcción de triángulos a partir de diferentes informaciones. • Clasificación de triángulos según la medida de sus lados y/o ángulos. • Construcción de triángulos a partir de diferentes informaciones y de analizar la posibilidad de su construcción y unicidad.	**Eje. Construcción, congruencia y semejanza de triángulos** • Posibilidad de construcción mediante diferentes criterios usando la noción de circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de otro y/o la suma de los ángulos interiores de un triángulo. • Posibilidad de construcción de un triángulo mediante la desigualdad triangular. • Determinación del rango de medidas que puede tener el lado de un triángulo a partir de la medida de sus otros dos lados, utilizando la desigualdad triangular. • Criterio de unicidad de construcción de un triángulo. • Fundamentación del criterio de unicidad de construcción de un triángulo dados tres de sus elementos de los que no se conoce la medida.

4.2. Contextualización disciplinar

4.2.1. Enseñanza y aprendizaje de la geometría en el tránsito del nivel primario al secundario

En educación primaria, el estudio de la geometría está centrado en la conceptualización de la medida, así como en la construcción y caracterización de las figuras geométricas.

En particular, en 6.° y 7.° grado conviene promover el concepto de **medida**, entendida como la cantidad que cuantifica los grados o niveles en que se presenta una cualidad o magnitud, como la distancia, la altura, el peso, la preferencia, la presión, etc. Se expresa empleando un número y una **unidad de medida**: 4 carillas, 5 kilómetros, 0,3 litros, medio kilogramo, 5,7 metros, 75 metros cuadrados, etc.

Asimismo, las nociones y construcciones de las **figuras** y **formas** geométricas son fundamentales para construir la geometría elemental. En un primer momento, es ideal poder distinguir entre la forma geométrica como esa manera de apreciar e interpretar los objetos o espacios de la naturaleza y la vida cotidiana, y la figura geométrica como el modelo matemático que se construye a partir de relaciones de medida y propiedades espaciales.

Así, para el desarrollo de la construcción de triángulos, su estudio y clasificación, se hará vital transitar entre dos **conceptualizaciones del triángulo** como figura geométrica, esto es:

- **a.** entender el triángulo como la unión de tres segmentos de recta determinados por tres puntos no colineales en un mismo plano, y
- **b.** entenderlo también como una relación de medida longitudinal y/o angular específica que genera su forma característica de 3 lados y 3 ángulos.

Conviene que el tratamiento didáctico que movilice las construcciones geométricas en niveles educativos básicos se centre en las estrategias de experimentación que permitan la visualización de las relaciones de medida, la descripción de las propiedades geométricas que sustentan la construcción y la argumentación de las y los estudiantes.

Dicho tratamiento didáctico permite movilizar lo perceptivo e intuitivo de las formas (longitudes, angulares) hacia las propiedades o teoremas geométricos establecidos. Lo anterior se propone en contraposición a enfoques que promueven únicamente la reproducción de pasos preestablecidos o del dibujo geométrico, y no fomentan el sentido de las propiedades y relaciones de medida.

4.2.2. Geometría y triángulos: conceptos base asociados

a. Un tipo de tarea: la construcción del triángulo

Conviene iniciar la reflexión geométrica clarificando que la construcción del triángulo no es un objeto matemático en sí mismo, sino que es un tipo de tarea. El objeto matemático que se requiere discutir en la geometría corresponde a la figura geométrica conocida como *triángulo*. Esta distinción nos ayuda a precisar entonces qué se requiere aprender sobre el triángulo como objeto de la geometría: ¿su definición, su construcción, sus elementos, sus cualidades, como forma, área, perímetro, u otros aspectos?

En este documento se apuesta al trabajo en la construcción de triángulos como un medio para conocer y conceptualizar la figura geométrica *triángulo*.

b. La necesidad de medir

Además del conteo, la medición es una práctica que las personas han empleado en la vida cotidiana desde tiempos ancestrales.

La actividad de medir está asociada a la necesidad de cualificar y cuantificar el espacio en el que vivimos, es decir, de analizar sus características, como su forma (por ejemplo, rectangular, triangular, etc.), a fin de que podamos medirlo a través de actividades como la comparación y la transformación (cambio de forma o medidas).

c. Distinguir entre forma y medida

Una correcta significación de las figuras geométricas involucra la distinción principal entre la forma característica y el concepto de medida. En este sentido, podemos referirnos a la forma como un objeto perceptible que evoca o simboliza el objeto abstracto correspondiente (Godino y Ruíz, 2002). Por ejemplo, la imagen de la pizarra tiene forma rectangular; sin embargo, no es un rectángulo en tanto figura geométrica.

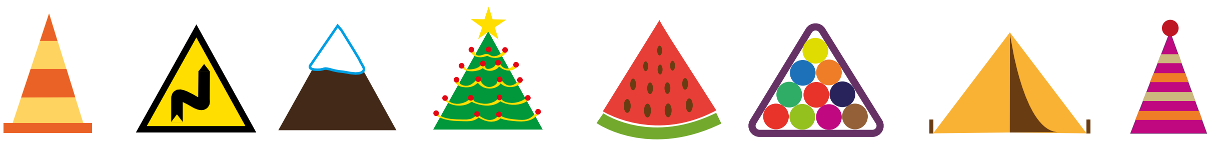
La medida hace referencia al número asociado a un objeto que posee dimensiones y que es acompañado por una unidad de medida, por ejemplo, 3 centímetros es una cantidad de longitud (una dimensión), en donde 3 es la medida de longitud y centímetros es la unidad de medida (Castillo, 2015).

d. Distinguir entre el dibujo y la figura geométrica

Un dibujo es una representación de un objeto del espacio físico, el cual tiene forma y características medibles y perceptibles. Tal como vimos en el caso anterior, el dibujo de la pizarra tiene forma rectangular, es decir, puedo dibujarla a partir de la percepción de la forma, pero el dibujo propiamente con forma rectangular no es la figura geométrica *rectángulo*. Por el contrario, la figura es un objeto teórico de la geometría que modela una relación de medida específica y, por ende, se puede representar con forma, cualidades y elementos característicos.

En ese sentido, toda figura tiene forma y se puede dibujar, pero no todo dibujo estará representando una figura geométrica. Por ejemplo, a continuación, se muestran dibujos (imágenes) con forma triangular; sin embargo, ninguno de ellos es la representación de un triángulo en tanto figura geométrica.

Imagen 46. Dibujos con forma triangular



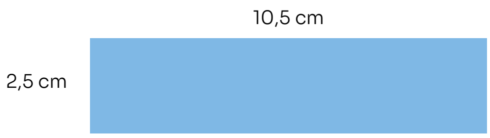
e. Distinguir la actividad aritmética de la geométrica en contextos de medida

En tareas en las que se trabaja con números o medidas suelen presentarse confusiones sobre la actividad matemática de estudio. En particular, la actividad aritmética y geométrica van de la mano, por lo que, aunque tienen aspectos comunes, conviene hacer énfasis en sus diferencias, con la finalidad de que ambas tengan protagonismo en el momento didáctico adecuado.

Así, conviene destacar que en la actividad aritmética se hace énfasis en una medida particular, por ejemplo, largo, ancho o altura, cuya finalidad es el análisis de una de dichas características para dar solución a problemas como *¿cuánto mide un listón o un marco?* y *¿qué fracción representa el espacio que ocupa cierta forma?*, entre muchos otros.

Se muestra, a continuación, un ejemplo concreto de actividad aritmética en contexto de medida.

> Si se sabe que, para calcular el área de un rectángulo, hay que multiplicar la medida del lado de la figura por la medida de su altura, ¿cuál es la medida del área del siguiente rectángulo?



En este caso, se está solicitando explícitamente que se realice una actividad aritmética en un contexto de medida (se pide la medida del área), ya que se indica cuál es el procedimiento para determinar la medida del área del rectángulo y se pretende que se realice la operación multiplicativa entre las medidas dadas y, erróneamente, suele considerarse que es una actividad geométrica, ya que se enuncia la idea de *área de un rectángulo*.

En cambio, en la actividad geométrica, el principal interés es el trabajo con las relaciones intrínsecas de los objetos geométricos, por ejemplo, las rectas paralelas y la distancia invariante entre ellas; la congruencia y la correspondencia punto a punto de las figuras (relación isométrica); la semejanza y la relación de proporcionalidad entre las medidas de dos o más figuras; las razones trigonométricas y la relación de medida entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo, entre muchas otras.

Se muestra, a continuación, un ejemplo concreto de actividad geométrica en contexto de medida.

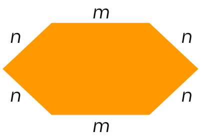
> Determiná entre qué valores está la medida del tercer lado de un triángulo, sabiendo que los otros dos miden 6 cm y 7 cm.

f. Distinguir la actividad algebraica de la geométrica en contextos de generalización

Como se mencionó en el apartado previo, la actividad geométrica pone énfasis en las relaciones inherentes entre las formas espaciales en distintas dimensiones (una, dos o tres, según el caso) y sus medidas. Así, la actividad algebraica está vinculada con la actividad geométrica, ya que se requiere del estudio de la generalización de las relaciones geométricas y su simbolización en fórmulas que expresen maneras de proceder.

Sin embargo, conviene distinguir la actividad propiamente algebraica aun cuando se trabaje en contextos geométricos de generalización. A continuación, se muestra un ejemplo de una actividad algebraica en contextos de generalización de la medida de perímetro.

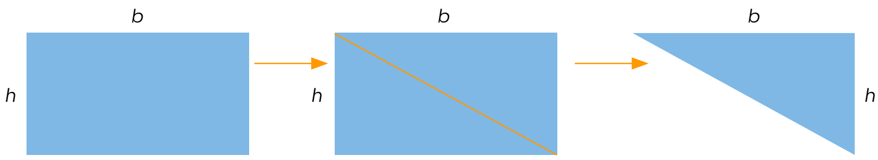
Determiná la expresión algebraica que representa la medida del perímetro del siguiente hexágono, en función de los valores de sus lados *m* y *n*.



Se puede reconocer que la actividad cognitiva centrada en el álgebra hace énfasis en la representación y simbolización de las relaciones aditivas o multiplicativas que expresan la medida del perímetro del hexágono en función del rango de valores que puedan asignarse a los lados *m* y *n*. Así, se centra el estudio en el planteamiento de la equivalencia estructural siguiente: $P = 2m + 4n$, o bien en el análisis e interpretación de dicha expresión como "la medida del perímetro *P* es equivalente a la adición de 2 veces la medida *m* y 4 veces la medida *n*".

En una actividad geométrica, la generalización y simbolización recae en el estudio de patrones de comportamiento y el establecimiento de las relaciones geométricas a partir de las características invariantes, aun cuando la forma se modifique. Por ejemplo:

Considerá la siguiente secuencia de imágenes en la cual se obtiene un triángulo rectángulo a partir de la transformación de un rectángulo de base *b* y altura *h*. ¿En qué condiciones será cierto que la medida de área de un triángulo cualquiera será siempre la mitad de la medida de área de un rectángulo? Argumentá tu respuesta.



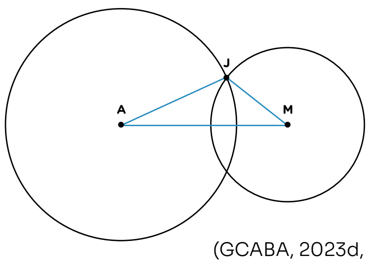
4.2.3. Sobre el triángulo y su construcción

a. Reconocer los elementos invariantes del triángulo

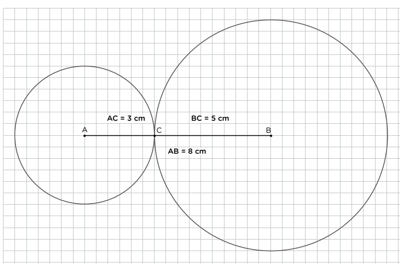
Son dos las relaciones que permiten la existencia de un triángulo como figura geométrica.

1. La desigualdad triangular. La propiedad afirma que, dados tres segmentos de recta, es posible construir un triángulo único siempre que la suma de las longitudes de dos de sus lados cualesquiera sea mayor que el tercer segmento. Esta relación entre las medidas de los segmentos de recta permite asegurar la no colinealidad de los 3 puntos o vértices del triángulo.

Imagen 47. Ejemplos para reflexionar sobre la desigualdad triangular



(GCABA, 2023d, p. 91)



(GCABA, 2023e, p. 76)

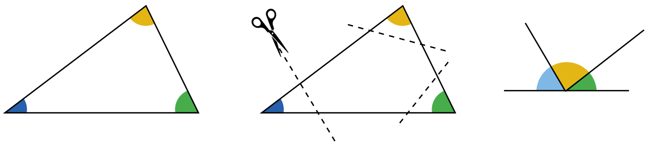
PARA REFLEXIONAR ENTRE TODOS Y TODAS

Para que un triángulo exista, es condición que la suma de la medida de dos lados cualesquiera sea mayor que la medida del tercer lado. Esta propiedad se llama *propiedad triangular*.

(GCABA, 2023d, p. 93)

2. La suma de sus ángulos interiores. La propiedad asegura que siempre será de 180° la suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo, por lo que, dados tres ángulos, es posible construir un triángulo siempre que la suma de dichos ángulos sea de 180°.

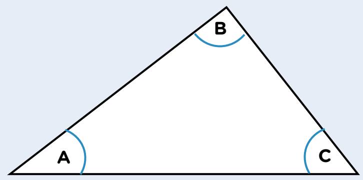
Imagen 48. Ejemplos para reflexionar sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo



(Martinez y Mohan, 2018, p. 118)

PARA RECORDAR

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°.



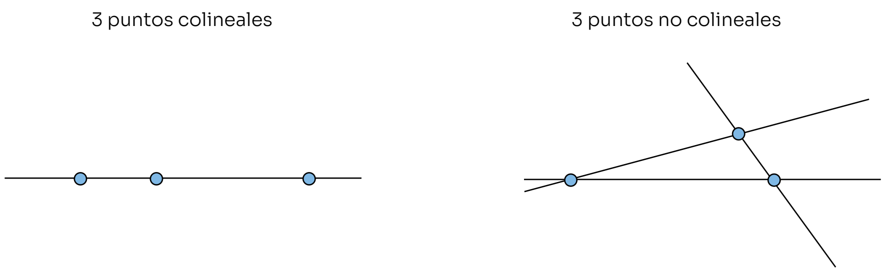
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

(GCABA, 2023d, p. 110)

b. Transformaciones del triángulo: tipos de triángulos, familia de triángulos

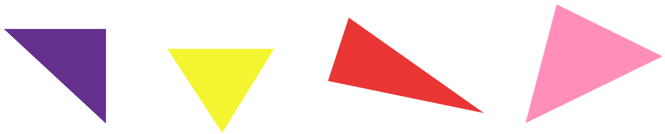
¿Cuántas formas triangulares existen? En una primera instancia, un triángulo se puede caracterizar por la unión de tres segmentos de recta determinados por tres puntos no colineales en un mismo plano, es decir, que no se encuentran alineados, y por ello se forman 3 segmentos de recta o lados y 3 aberturas o ángulos en su interior.

Imagen 49. Ejemplos sobre colinealidad de puntos en el plano



Así, se pueden percibir una gran variedad de formas triangulares con medidas de lados y ángulos distintos y en distintas posiciones (lo cual rompe con la idea de las figuras prototípicas arraigadas en el trabajo geométrico).

Imagen 50. Ejemplos de formas triangulares

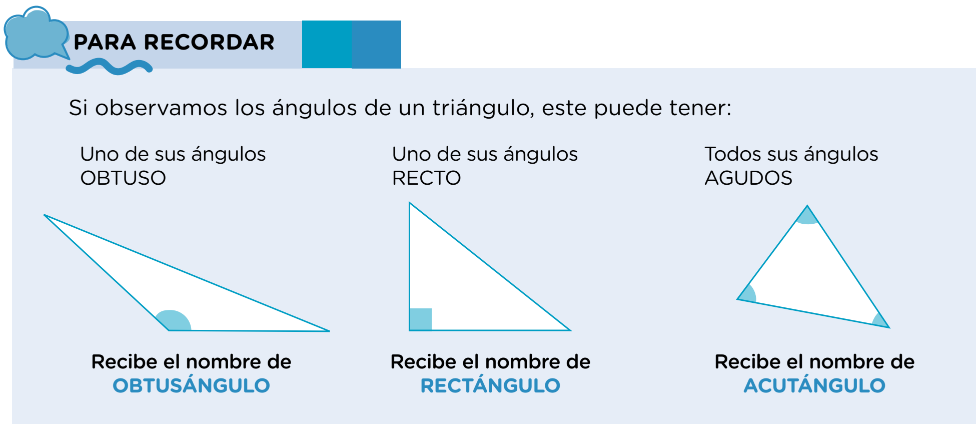


Todos estos dibujos representan triángulos que pueden ser una familia de triángulos, pues comparten las características y formas propias del triángulo. Sin embargo, también pueden subclasificarse según las modificaciones o transformaciones que se puedan realizar al espacio que ocupan y, por ende, a la medida de sus longitudes o ángulos.

De esta manera, podemos generar réplicas (conservando la forma y el tamaño) de cada triángulo dado o también se pueden construir a distinta escala (conservando la forma y modificando el tamaño).

Sobre la base de las modificaciones respecto de la forma y medidas longitudinales y angulares que se han mencionado, se puede clasificar a los triángulos según la medida de sus lados y ángulos.

Imagen 51. Transformación de triángulos



(GCABA, 2023e, p. 78)

Triángulos según sus lados y sus ángulos

Si prestamos atención a la medida de sus lados, los triángulos pueden tener:

- Tres lados que miden lo mismo (es decir, que son iguales). Son triángulos **equiláteros**.
- Dos lados que miden lo mismo. Son triángulos **isósceles**.
- Tres lados que tienen diferente medida. Son triángulos **escalenos**.

(GCABA, 2023e, p. 77)

De esta manera, en el aula importa enfatizar las clasificaciones de las figuras geométricas como resultado de la actividad geométrica y no solo como un listado de características aisladas.

c. Generar nuevos triángulos con ciertas características (medidas)

La actividad geométrica entendida como uso y transformación del espacio, en este caso en una y dos dimensiones, requiere de propiciar la generación o construcción de nuevos triángulos dadas ciertas medidas o bien de argumentar la no existencia o posibilidad de construcción de un triángulo dadas ciertas medidas. Por ejemplo, ¿se podrá construir un triángulo equilátero que tenga un ángulo interior de 90°?, ¿se podrá duplicar la medida de los lados de un triángulo y conservar su forma de isósceles obtusángulo?, ¿existirá una manera de generar un triángulo que abarque el doble de área que otro, pero que cambie su forma de escaleno acutángulo?, entre otras formas de reflexionar sobre la transformación del espacio.

d. Establecer las relaciones de medida mínimas para la construcción de una réplica del triángulo (criterios de congruencia)

Si bien se conoce que los criterios de congruencia de triángulos son 3 (ángulo-lado-ángulo, lado-ángulo-lado y lado-lado-lado), en el aula se hace indispensable la exploración de una colección de datos mínimos para garantizar la congruencia entre dos o más triángulos, es decir, la equivalencia tanto en forma como en las medidas.

Así, al construirse dos o más triángulos que son réplica de uno inicial, en geometría se considera que es un único triángulo, pues es producto de una misma relación entre sus medidas, aunque se ubiquen en distinta posición en el plano. La siguiente tabla presentada en el capítulo 2 del documento *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007) es un buen referente para trabajar en estos criterios mínimos para asegurar la congruencia entre triángulos.

Tabla 22. Clasificación de situaciones para la construcción de triángulos según los datos dados (recuperado de GCABA, 2007, p. 41)

Dada una colección de datos para construir un triángulo, pueden aparecer las siguientes situaciones.		
Datos a partir de los cuales **no se pueden** construir triángulos	Datos a partir de los cuales se puede construir **un único** triángulo	Datos a partir de los cuales se pueden construir **varios** triángulos distintos
Tres lados “que no cierran”	Tres lados “que cierran”	Dos lados
Dos ángulos que suman más que 180°	Un lado y dos ángulos adyacentes que sumen menos que 180°	Dos ángulos que sumen menos que 180°
Tres ángulos que no suman 180°	Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos	Tres ángulos que sumen 180°

e. Percepción y visualización de las relaciones de medida

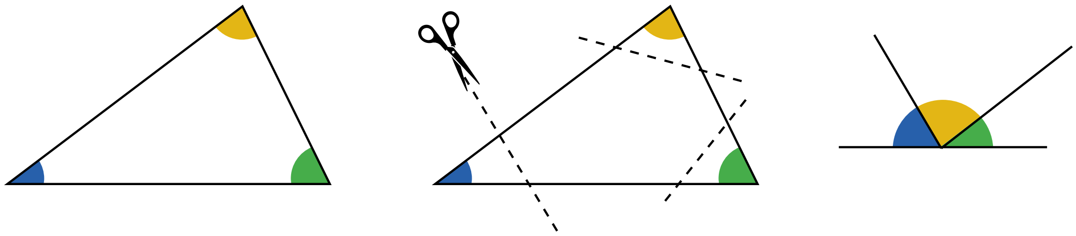
La percepción es la forma en que el sentido de la vista aporta en la adquisición de conocimientos. Sin duda, es una herramienta valiosa y fundamental en el estudio del espacio que nos rodea. La visualización es una forma de “mirar más allá” de lo evidente y establecer conexiones que no son perceptibles a simple vista.

Así, la percepción y la visualización son habilidades del pensamiento que favorecerán el tránsito de la concepción de un dibujo triangular a la visualización de las relaciones de medida que hacen a una figura triangular.

El desarrollo de la percepción y visualización del espacio y la medida puede fortalecerse desarrollando las actividades propuestas en las secuencias didácticas para docentes y actividades para los/as alumnos/as de *Construcción de triángulos con GeoGebra* (GCABA, 2018c). En ese documento se propone iniciar 7.° grado con la exploración de la construcción de triángulos, desarrollando conocimientos dinámicos que ofrece GeoGebra como entorno de aprendizaje. En este sentido se posibilita, entre otros aspectos, la exploración de la cantidad de soluciones de una construcción como parte de la práctica geométrica.

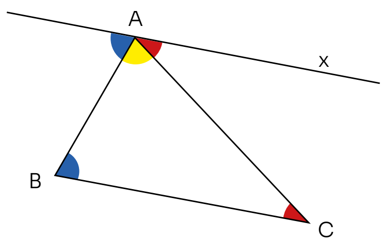
Recursos a lápiz y papel también se pueden emplear para promover la percepción y visualización espacial; por ejemplo, para el caso de la inferencia de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de todo triángulo, pueden realizarse actividades que exijan cortar y unir los ángulos para que se perciba la relación esperada.

Imagen 52. Ejemplo de actividad para inferir la propiedad angular de los triángulos en el nivel primario (Martínez y Mohan, 2018)



En el nivel secundario, con posterioridad al trabajo de aula con ángulos entre paralelas y una transversal, se puede reforzar con el doblado de papel para verificar esta propiedad y concluir que **es posible construir un triángulo dados dos ángulos y un segmento entre dichos ángulos siempre que la suma de esos ángulos sea menor que 180°**.

Imagen 53. Ejemplo de actividad para inferir la propiedad angular de los triángulos en el nivel secundario



4.3. Problematización de la matemática escolar

Este apartado evidencia las ideas fuerza que pretendemos movilizar de manera transversal para la construcción de triángulos. Sobre la base de lo que se presentó en los apartados anteriores, "Ubicación curricular" y "Contextualización disciplinar", se proponen las nociones matemáticas que se consideran de relevancia para trabajar durante la articulación escolar.

1. Las características invariantes principales de una **figura triangular** son:
   - Dados tres segmentos de recta es posible construir un triángulo único siempre que la suma de las longitudes de dos de sus lados cualesquiera sea mayor que el tercer segmento. Esta característica también es conocida como la desigualdad triangular.
   - Dados tres ángulos es posible construir un triángulo siempre que la suma de la medida de los ángulos interiores sea de 180 grados.

2. Es necesario transitar entre dos conceptualizaciones del triángulo como figura geométrica, esto es:

- entender el triángulo como la unión de tres segmentos de recta determinados por tres puntos no colineales en un mismo plano, y
- entenderlo también como una relación de medida longitudinal y/o angular específica que genera su forma característica de 3 lados y 3 ángulos.

3. La construcción del triángulo no es un objeto matemático, sino que es un tipo de tarea. El objeto geométrico es la figura geométrica conocida como *triángulo* y el proceso de construcción es un medio para conocer y conceptualizar la figura.

4. Medir es una actividad humana que no se restringe al uso de un instrumento de medición convencional (como la regla graduada, la escuadra o el semicírculo) o no convencional (como la longitud de un paso o un puño), sino también a la comparación de longitudes o la sobreposición de ángulos para determinar si una medida es igual, mayor o menor que otra.

5. Conviene distinguir entre el dibujo, la forma y la figura. Mientras que el dibujo es la representación de un objeto del espacio físico, que tiene forma y características perceptibles y medibles, la figura es un objeto teórico de la geometría que modela una relación de medida específica.

6. Es necesario distinguir la actividad aritmética de la actividad geométrica en contextos de medida. Así, mientras que en aritmética se cuestiona cuánto es la medida de una magnitud, por ejemplo, largo o ancho, en geometría la medida será una manera de comunicar la posibilidad de construcción de una figura que varíe en su forma y ocupe un espacio fijo específico o viceversa.

7. Concebir los criterios de congruencia entre triángulos como las relaciones de medida mínimas para la construcción de una réplica del triángulo.

8. Promover las habilidades de percepción y visualización para el tránsito de la concepción de un dibujo triangular a la visualización de las relaciones de medida que hacen a una figura triangular.

4.4. ¿Cómo operativizar las ideas fuerza?

Sobre la base del material de *Estudiar y aprender* para primaria, *Estudiar y aprender* para secundaria, las secuencias didácticas de primaria, las secuencias didácticas de secundaria, *Matemática. Geometría* (GCABA, 2007) y lo abordado en los apartados anteriores sobre la ubicación curricular y la contextualización disciplinar, proponemos una manera de operativizar las ideas fuerza presentadas en el apartado anterior sobre la problematización de la matemática escolar.

Estudiar y aprender para primaria
https://bit.ly/3SEMZw0

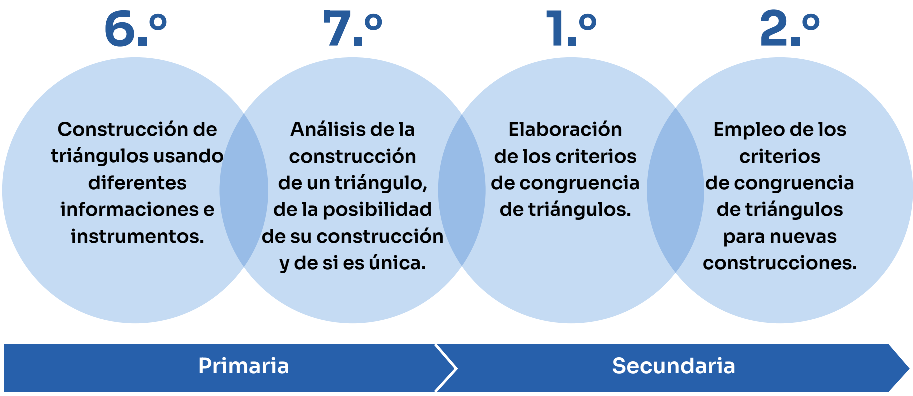
Estudiar y aprender para secundaria
https://bit.ly/49KhKqf

Secuencias didácticas de primaria
https://bit.ly/3T6Ku7e

Secuencias didácticas de secundaria
https://bit.ly/4bNJHPS

El acercamiento evolutivo para la tarea relativa a la construcción de triángulos que se demanda para el tránsito del segundo ciclo del nivel primario al primer ciclo del nivel secundario puede sintetizarse en los siguientes objetivos por año escolar.

Imagen 54. Propuesta de objetivos por año escolar para el tránsito del contenido *construcción de triángulos*



A continuación, se presenta cómo se expresa cada uno de estos objetivos en los materiales didácticos propuestos para el aula de matemática en los distintos niveles educativos.

Se recomienda que el objetivo didáctico para cuarto y quinto grado sea la consolidación de la clasificación de triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos, así como la propiedad de la suma de los ángulos interiores de todo triángulo para el análisis de la posibilidad de construcción de triángulos dadas ciertas medidas y datos específicos.

4.° grado

Se enfatizan los elementos que constituyen las figuras geométricas, como la cantidad de vértices, diagonales y lados, así como las medidas de los lados, a la vez que se introduce el papel del ángulo, en particular, identificando los ángulos rectos o de 90°.

Imagen 55. “El juego de pistas para adivinar figuras”, *Estudiar y aprender en Cuarto* (GCABA, 2023c, p. 62)

7. Agregá una o más pistas para que se pueda estar seguro/a de que se trata de la figura 7. Tené en cuenta que podés usar **la regla y la escuadra** para ayudarte.

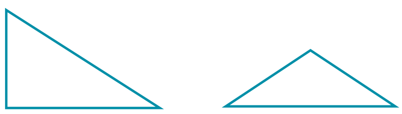
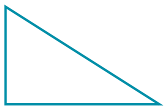


Figura 7 **Figura 8**

- Tiene 3 lados.
- Tiene 3 vértices.
- ....
- ....

Para la construcción de triángulos, en la **actividad 7** se propone analizar dos tipos de triángulos a partir de sus similitudes y diferencias, de manera que se puedan describir las características propias de solo uno de ellos. Por ejemplo:

Tabla 23. Ejemplo de análisis de similitudes y diferencias entre dos tipos de triángulos

	Triángulo. Figura 7	**Triángulo. Figura 8**
	 **Figura 7**	 **Figura 8**
Similitudes	▪ Tres vértices ▪ Tres lados ▪ Tres ángulos ▪ Dos ángulos agudos (miden menos de 90°)	▪ Sin diagonales
Diferencias	Sus tres lados miden distinto Un ángulo recto (mide 90°)	Dos de sus lados miden igual Un ángulo mayor que 90°

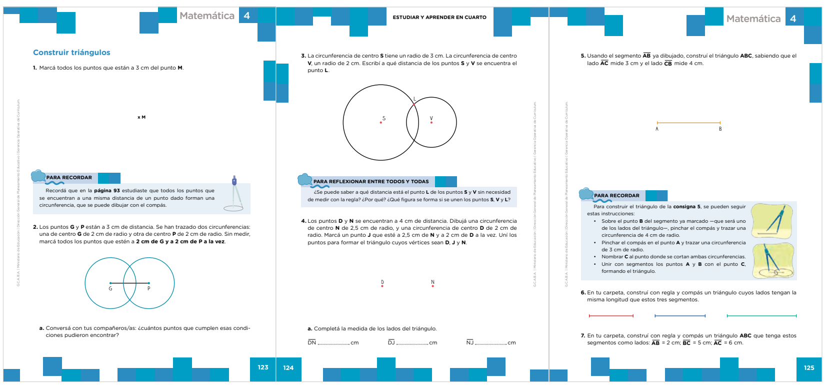
Así, para la construcción de triángulos, en este momento conviene enfatizar que dos o más triángulos pueden compartir características similares, pero tener formas distintas. En este caso (Ver **Tabla 23**), la **Figura 7** tiene forma de triángulo rectángulo y la **Figura 8**, de triángulo isósceles. De esta manera, es una oportunidad para enfatizar los elementos invariantes de todo triángulo, como la cantidad de lados, ángulos y vértices, la ausencia de diagonales, pero también para enfatizar los elementos que permiten generar transformaciones en un triángulo, como las medidas longitudinales o de sus lados, y las angulares. Así, mientras que todos comparten la forma triangular, también se genera una variedad en la forma triangular, según las medidas de sus lados y ángulos.

Hasta este punto se trabajó con ideas geométricas alrededor de la forma triangular y los elementos que constituyen al triángulo y permiten clasificarlo según sus medidas de lados y ángulos, en particular se potencia:

a. la conceptualización del triángulo como la unión de tres segmentos de recta determinados por tres puntos no colineales en el plano,

b. la percepción visual de las distintas formas triangulares, de tal manera que conservan características similares, como la medida del ángulo recto.

A partir de la siguiente actividad se introduce la conceptualización del triángulo como figura geométrica que se genera por relaciones de medida específicas. Lo anterior cumple un paso medular y disruptivo en el proceso de conceptualización de la figura geométrica *triángulo*.



PDF

"Construir triángulos", *Estudiar y aprender en Cuarto* (GCABA, 2023c, pp. 123-125) https://bit.ly/3uZKlcH

En esta actividad, didácticamente se pretende, por una parte, hacer explícito el procedimiento de construcción de un triángulo empleando la regla y el compás y, por la otra, mediante la modalidad de construcción de figuras a partir de ciertos datos, se procura establecer relaciones entre figuras geométricas como:

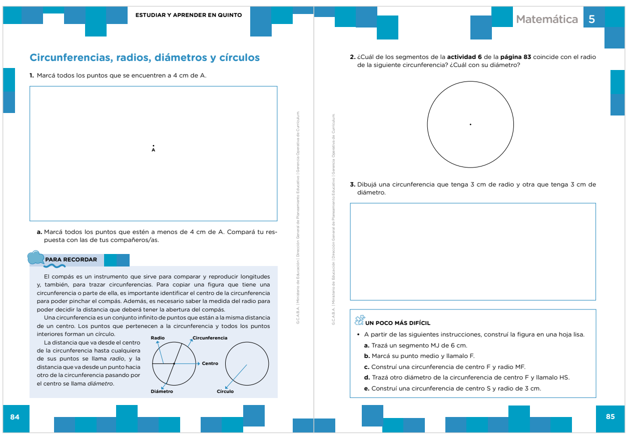
a. Concebir los puntos de dos circunferencias que cumplen simultáneamente dos condiciones de medida, relativas a la noción de distancia.
b. Usar la conceptualización de la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes a un punto fijo para validar medidas de los lados de un triángulo, sin necesidad de medirlos con regla graduada.
c. Asociar los radios de dos circunferencias a los lados de un triángulo de igual medida que los respectivos radios.

Adicionalmente, se inicia con el uso de simbología y terminología para los segmentos de recta, por ejemplo, el segmento AB como $\overline{AB}$, indispensable para comunicar información geométrica en el proceso de análisis y construcción de figuras.

5.° grado

Se inicia movilizando el uso del compás como instrumento que permite medir longitudes y trasladar los segmentos de recta a otra posición o ubicación de la hoja. Las medidas quedarán en términos del doble, mitad, triple, igual. Lo anterior representa un reto para las niñas y los niños en la construcción de triángulos, así como en la conceptualización de las propiedades y relaciones de medida que caracterizan a una figura triangular. Además, en este grado se trabajan tres conocimientos primordiales para la conceptualización de un triángulo como figura geométrica y para la construcción de este a partir de sus relaciones de medida.

1. La conceptualización de la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro*, así como del círculo como el conjunto de puntos tanto de una circunferencia como del interior de esta, además de los elementos que constituyen una circunferencia, como radio, diámetro y centro.
2. El uso de la regla y el compás como instrumentos para medir, trazar y construir formas circulares y longitudinales.
3. Describir y comunicar información necesaria para la construcción y/o reproducción de una figura. En particular, el reconocimiento de elementos coincidentes en figuras distintas dadas las condiciones de su construcción, por ejemplo, dos circunferencias que comparten el mismo centro, pero distinto radio, o el radio de una circunferencia que a la vez es radio de otra circunferencia, etc. (GCABA, 2023d, pp. 84-87)


ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO

Circunferencias, radios, diámetros y círculos

1. Marcá todos los puntos que se encuentren a 4 cm de A.

a. Marcá todos los puntos que estén a menos de 4 cm de A. Compará tu respuesta con las de tus compañeros/as.

PARA RECORDAR

El compás es un instrumento que sirve para comparar y reproducir longitudes y, también, para trazar circunferencias. Para copiar una figura que tiene una circunferencia o parte de ella, es importante identificar el centro de la circunferencia para poder pinchar el compás. Además, es necesario saber la medida del radio para poder decidir la distancia que deberá tener la abertura del compás.

Una circunferencia es un conjunto infinito de puntos que están a la misma distancia de un centro. Los puntos que pertenecen a la circunferencia y todos los puntos interiores forman un círculo.

La distancia que va desde el centro de la circunferencia hasta cualquiera de sus puntos se llama *radio*, y la distancia que va desde un punto hacia otro de la circunferencia pasando por el centro se llama *diámetro*.

84

Matemática 5

2. ¿Cuál de los segmentos de la **actividad 6** de la **página 83** coincide con el radio de la siguiente circunferencia? ¿Cuál con su diámetro?

3. Dibujá una circunferencia que tenga 3 cm de radio y otra que tenga 3 cm de diámetro.

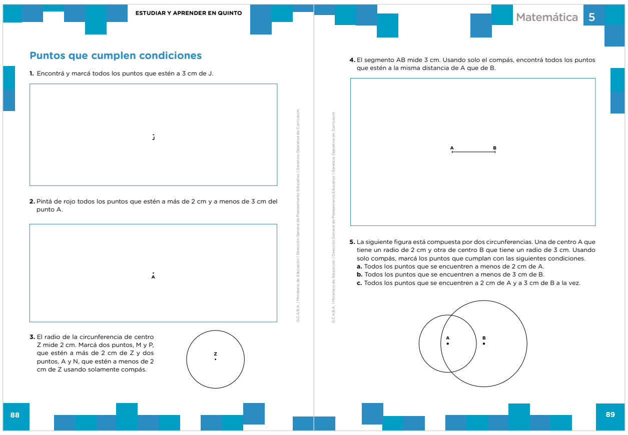
UN POCO MÁS DIFÍCIL

- A partir de las siguientes instrucciones, construí la figura en una hoja lisa.
  a. Trazá un segmento MJ de 6 cm.
  b. Marcá su punto medio y llamalo F.
  c. Construí una circunferencia de centro F y radio MF.
  d. Trazá otro diámetro de la circunferencia de centro F y llamalo HS.
  e. Construí una circunferencia de centro S y radio de 3 cm.

85

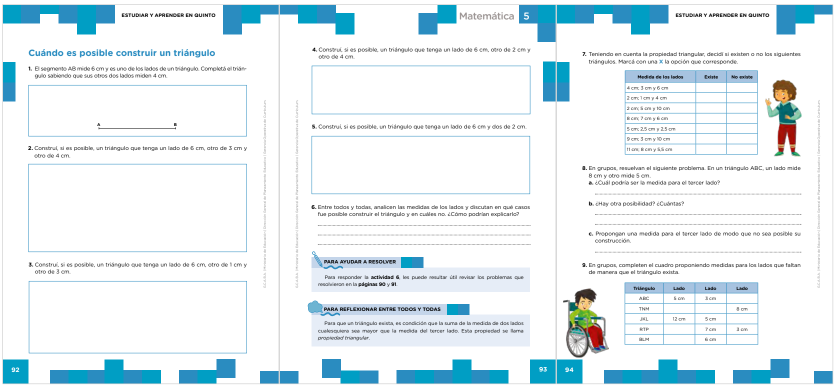
"Circunferencias, radios, diámetros y círculos", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 84-87)
https://bit.ly/3URtV0x

Posteriormente, se trabaja sobre las condiciones de las circunferencias para que se corten en dos puntos, en uno y en ninguno, dada la construcción solicitada: si las medidas de los radios suman más que la medida del segmento inicial dado, las circunferencias se cortarán en dos puntos; si la suma de los radios es igual a la medida del segmento dado, se cortarán en un punto, y si la suma es menor que la longitud del segmento dado, no se cortarán (GCABA, 2023d, pp. 88-91).



"Puntos que cumplen condiciones", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 88-91)
https://bit.ly/3uO5s1l

De esta manera, se introducen las relaciones de medida que caracterizan al triángulo como figura geométrica, más allá de su forma y los elementos que la constituyen. Esta relación de medida es conocida como *desigualdad triangular* o *propiedad triangular*, y se la pretenderá consolidar en la actividad siguiente.



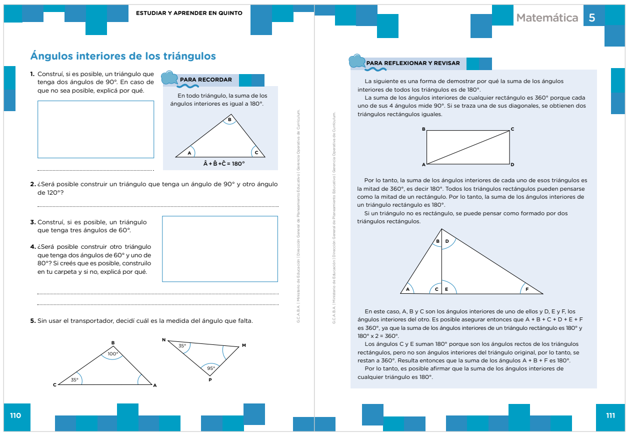
"Cuándo es posible construir un triángulo", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 92-94)
https://bit.ly/4c6YxRK

Lo anterior constituye una base para fundamentar esta propiedad triangular, así como la existencia y conceptualización de un **triángulo como una relación de medida** y no solo por su forma característica.

Un aspecto disparador es la posibilidad de la construcción de un triángulo dadas tres medidas longitudinales, esto es, el reconocimiento de que con tres segmentos de recta cualesquiera no siempre se puede construir un triángulo, aunque todo triángulo se forma con tres segmentos de recta. Esto último requerirá un análisis de la cantidad de triángulos que se pueden construir con ciertos datos de las medidas de los lados, por ejemplo, dada la medida de uno, dos o tres de sus lados.

Otra forma de conceptualizar la figura triangular es a partir de una relación de medida angular que permite garantizar su existencia o posibilidad de construcción, a saber, que la suma de los ángulos interiores sea de 180°.

Así, de manera similar a la relación de medida de sus lados, tres medidas angulares cualesquiera no permiten construir un triángulo, aunque todo triángulo se forma con tres ángulos. Esto último requerirá un análisis de la cantidad de triángulos que se pueden construir con ciertos datos de las medidas de los ángulos, por ejemplo, dada la medida de uno, dos o tres ángulos interiores.



ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO

Ángulos interiores de los triángulos

1. Construí, si es posible, un triángulo que tenga dos ángulos de 90°. En caso de que no sea posible, explicá por qué.

PARA RECORDAR

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

2. ¿Será posible construir un triángulo que tenga un ángulo de 90° y otro ángulo de 120°?

3. Construí, si es posible, un triángulo que tenga tres ángulos de 60°.

4. ¿Será posible construir otro triángulo que tenga dos ángulos de 60° y uno de 80°? Si creés que es posible, construilo en tu carpeta y si no, explicá por qué.

5. Sin usar el transportador, decidí cuál es la medida del ángulo que falta.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

110

Matemática 5

PARA REFLEXIONAR Y REVISAR

La siguiente es una forma de demostrar por qué la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos es de 180°.

La suma de los ángulos interiores de cualquier rectángulo es 360° porque cada uno de sus 4 ángulos mide 90°. Si se traza una de sus diagonales, se obtienen dos triángulos rectángulos iguales.

Por lo tanto, la suma de los ángulos interiores de cada uno de esos triángulos es la mitad de 360°, es decir 180°. Todos los triángulos rectángulos pueden pensarse como la mitad de un rectángulo. Por lo tanto, la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 180°.

Si un triángulo no es rectángulo, se puede pensar como formado por dos triángulos rectángulos.

En este caso, A, B y C son los ángulos interiores de uno de ellos y D, E y F, los ángulos interiores del otro. Es posible asegurar entonces que A + B + C + D + E + F es 360°, ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 180° y 180° x 2 = 360°.

Los ángulos C y E suman 180° porque son los ángulos rectos de los triángulos rectángulos, pero no son ángulos interiores del triángulo original, por lo tanto, se restan a 360°. Resulta entonces que la suma de los ángulos A + B + F es 180°.

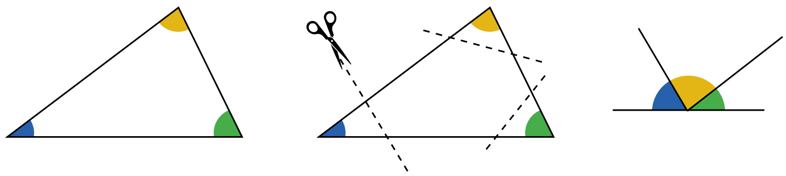
Por lo tanto, es posible afirmar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

111

"Ángulos interiores de los triángulos", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 110 y 111)
https://bit.ly/4c3MOTX

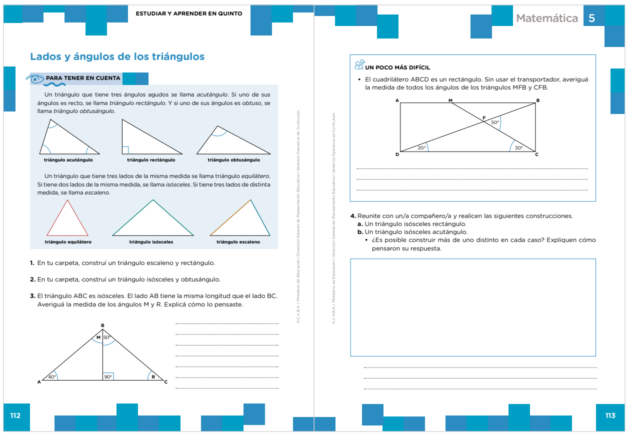
Un aspecto didáctico para destacar en esta actividad es la designación de la propiedad a manera de invitación para su verificación tanto de manera numérica (suma de la medida de los ángulos en grados) como respecto a la relación geométrica entre la medida de un ángulo y la medida del lado opuesto a este para la constitución de la forma triangular. Adicionalmente, se sugiere una actividad previa que permita experimentar esta relación de medida. A continuación, se sugiere el tipo de actividad.

> Un grupo de alumnas decidió analizar los moldes triangulares que se construyeron. Para ello colorearon los ángulos en papel reciclable, los recortaron y unieron como se muestra en la siguiente secuencia:
>
> 
>
> **a)** ¿Cuánto mide el nuevo ángulo formado por la unión de los tres ángulos internos del triángulo?
> **b)** Realiza la construcción propuesta por las alumnas y responde, ¿qué relación de medida de los 3 ángulos interiores de los triángulos se cumple? (Martínez y Mohan, 2018)

En el marco de un trabajo hipotético-deductivo, se pueden promover reflexiones de esta actividad mediante preguntas como las siguientes:

- ¿Qué observás? Compará tus conclusiones con las de tus compañeras y compañeros.
- Acabás de unir de forma práctica los tres ángulos internos de un triángulo. ¿Cuánto mide el nuevo ángulo generado por esta unión?
- Proponé un nuevo triángulo y copiá sus tres ángulos interiores sobre una misma semirrecta, de manera que se unan formando un ángulo nuevo. ¿Cuánto mide el nuevo ángulo generado por esta unión de los tres ángulos interiores?
- Con base en esta experiencia, escribí con tus palabras la relación de medida que cumplen los tres ángulos interiores de un triángulo. ¿Considerás que se cumplirá esta relación para triángulos obtusángulos?

Se concluye este grado escolar empleando la clasificación de los triángulos según las medidas de sus lados y ángulos, y la propiedad de la suma de los ángulos interiores de todo triángulo para determinar las medidas angulares faltantes, así como el análisis de la posibilidad de construcción de triángulos dadas ciertas medidas y datos específicos (GCABA, 2023d, pp. 112-113).


ESTUDIAR Y APRENDER EN QUINTO

Lados y ángulos de los triángulos

PARA TENER EN CUENTA

Un triángulo que tiene tres ángulos agudos se llama *acutángulo*. Si uno de sus ángulos es recto, se llama *triángulo rectángulo*. Y si uno de sus ángulos es *obtuso*, se llama *triángulo obtusángulo*.

triángulo acutángulo · triángulo rectángulo · triángulo obtusángulo

Un triángulo que tiene tres lados de la misma medida se llama triángulo *equilátero*. Si tiene dos lados de la misma medida, se llama *isósceles*. Si tiene tres lados de distinta medida, se llama *escaleno*.

triángulo equilátero · triángulo isósceles · triángulo escaleno

1. En tu carpeta, construí un triángulo escaleno y rectángulo.
2. En tu carpeta, construí un triángulo isósceles y obtusángulo.
3. El triángulo ABC es isósceles. El lado AB tiene la misma longitud que el lado BC. Averiguá la medida de los ángulos M y R. Explicá cómo lo pensaste.

112

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Dirección General de Planeamiento Educativo | Gerencia Operativa de Currículum.

Matemática 5

UN POCO MÁS DIFÍCIL

- El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Sin usar el transportador, averiguá la medida de todos los ángulos de los triángulos MFB y CFB.

4. Reunite con un/a compañero/a y realicen las siguientes construcciones.
   a. Un triángulo isósceles rectángulo.
   b. Un triángulo isósceles acutángulo.
   - ¿Es posible construir más de uno distinto en cada caso? Expliquen cómo pensaron su respuesta.

113

"Lados y ángulos de los triángulos", *Estudiar y aprender en Quinto* (GCABA, 2023d, pp. 112 y 113)
https://bit.ly/42XKj1e

Al trabajarse en la modalidad de construcción de figuras a partir de ciertos datos, conviene en este momento hacer énfasis en la exploración de los datos para la existencia del triángulo requerido, así como la posibilidad de construir más de un triángulo con distinta forma o medidas, pero que cumplen con las condiciones de medida simultáneamente.

Asimismo, en esta actividad se destaca la importancia de describir y explicar las relaciones de medida requeridas para la construcción, así como el detalle del procedimiento de construcción. Estos aspectos son importantes para la comunicación de la información geométrica y el reconocimiento de las propiedades implícitas.

Cabe destacar que las ideas fuerza para este grado recaerán en un primer acercamiento a las dos características invariantes del triángulo, la desigualdad triangular y la propiedad de sus ángulos internos, para favorecer el tránsito a la conceptualización del triángulo como relación de medida.

6.° grado

Objetivo: construcción de triángulos usando diferentes informaciones e instrumentos. Para ello, se requiere consolidar la identificación de la forma genérica de un triángulo y los elementos que la constituyen.

Se inicia con el uso de los instrumentos geométricos, como regla, compás, escuadra y transportador, en tanto herramientas para la conceptualización de las figuras geométricas y los elementos que las constituyen. Así, se enfatiza la idea sobre el papel de la construcción del triángulo como un tipo de tarea que permite conocer la figura *triángulo*. En particular, mediante la construcción de figuras a partir de ciertos datos, se espera que:

a. Se recuperen y consoliden las condiciones de las circunferencias para que se corten en dos puntos, en un punto y en ningún punto dada la construcción solicitada, a saber:

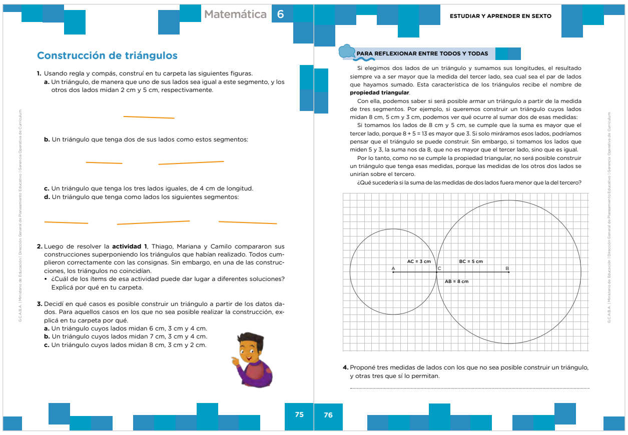
i. si las medidas de los radios suman más que el segmento inicial dado, las circunferencias se cortarán en dos puntos,

ii. si la suma de los radios es igual a la medida del segmento dado, se cortarán en un punto, y

iii. si la suma es menor que la longitud del segmento dado, no se cortarán.

b. Se infiera el desarrollo de la construcción de un triángulo empleando el compás. En consecuencia, se discutirá y argumentará sobre la existencia de dicho triángulo.

Posteriormente, se pretende consolidar la propiedad triangular como la relación de medida que permite la existencia y construcción de un triángulo mediante la construcción de figuras triangulares dados ciertos datos de medida longitudinal (segmentos de recta) (GCABA, 2023e, pp. 75-76).



"Construcción de triángulos", *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, p. 75 y 76)
https://bit.ly/3Ihta9A

Se trabaja con segmentos de recta dados y también con las medidas en centímetros para propiciar una interacción entre las diversas representaciones figurales que las y los estudiantes construyen de forma genérica. Así, es un momento propicio para enfatizar la distinción entre el dibujo que se presenta, la forma triangular y la figura *triángulo*.

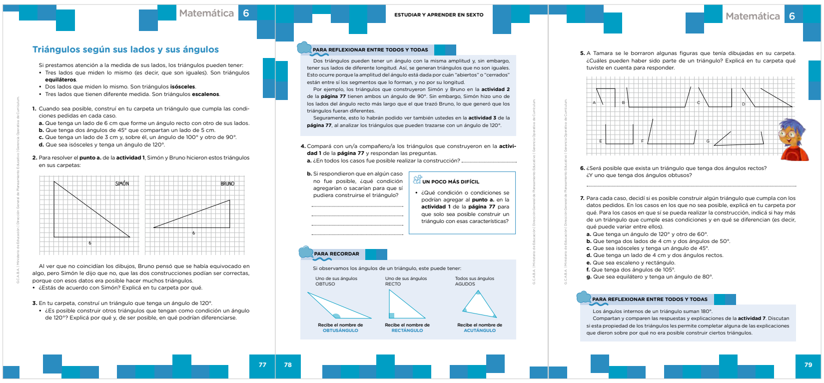
También se desarrolla la asociación entre las propiedades de la circunferencia y la propiedad triangular para la construcción de un triángulo. De esta manera, conviene concluir en lo siguiente. Dada la construcción de dos circunferencias, cada una con centro en cada extremo de un segmento dado:

a. si la suma de las medidas de los radios es mayor que el segmento inicial dado, las circunferencias se cortarán en dos puntos, lo que permitirá construir un solo triángulo con tres medidas de sus lados dadas y una réplica de ese triángulo en una posición contraria en el plano. Esto último se puede comprobar si se sobreponen las figuras.

b. si la suma de las medidas de los radios es igual a la medida del segmento dado, se cortarán en un punto y se ubicará en el mismo segmento de recta por lo que, al ser un punto colineal con los puntos extremos del segmento, será imposible la construcción de un triángulo.

c. si la suma de las medidas de los radios es menor que la longitud del segmento dado, no hay posibilidad de que las circunferencias se corten o coincidan en un punto, por lo tanto, tampoco será posible la construcción de un triángulo.

Se continúa con el análisis de la posibilidad de la construcción de un triángulo (existencia) mediante la construcción de figuras triangulares dados ciertos datos de medida longitudinal (lados) y angulares (ángulos internos), por ejemplo, dada la medida de un lado y un ángulo o de dos ángulos y un lado entre estos, etc. (GCABA, 2023e, pp. 77-79).



PDF

"Triángulos según sus lados y sus ángulos", *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e, pp. 77-79)
https://bit.ly/3OTUPkj

Asimismo, se inicia con la exploración de la **unicidad triangular**, es decir, con establecer las condiciones de medida de los lados y/o ángulos para que sea posible construir un triángulo y solo un triángulo que cumpla con esas características. Se espera consolidar también la terminología adecuada para nombrar los tipos de triángulos según su clasificación de medidas de lados o de ángulos con la finalidad de contar con un lenguaje geométrico que permita comunicar relaciones de medida de los triángulos que se requieren construir.

7.° grado

Objetivo: análisis de la construcción de un triángulo, de la posibilidad de su construcción y de si es única.

Se propone iniciar 7.° grado con la exploración de la construcción de triángulos articulando con conocimientos dinámicos que ofrece GeoGebra como entorno de aprendizaje. Para ello, se sugiere el uso de las secuencias didácticas para docentes y actividades para los/as alumnos/as de *Matemática. Construcción de triángulos con GeoGebra. Séptimo grado* (GCABA, 2018c). En términos generales, didácticamente, este material favorece (pp. 28 y 29):

- La identificación progresiva de que, dada la longitud de los lados de un triángulo, es posible construirlo a partir de trazar circunferencias cuyos radios tienen esa longitud.
- La exploración de la cantidad de soluciones de una construcción como parte de la práctica geométrica que se intenta instalar.
- La posibilidad de anticipar, a partir de la medida de los lados de un triángulo, si será o no posible su construcción.
- La consideración de que, si se tiene como dato la longitud de dos lados de un triángulo, existe más de una solución posible y, si se conoce la medida de los tres lados, la solución es única.
- La apelación a la propiedad triangular como posibilidad de anticipación en la construcción de triángulos dados sus lados.
- El avance en la utilización del programa GeoGebra para realizar las construcciones propuestas, en términos de la selección y uso de los comandos, la utilización del arrastre para analizar la construcción, la reflexión sobre las propiedades que se mantienen y las que se modifican en el movimiento.

En particular, se trabajan problemas como el señalado a continuación, con el cual se pretende la construcción de un triángulo sin que se desarme al mover los elementos dinámicos, dadas las medidas de dos de sus lados.

Imagen 56. "Construcción de triángulos en Geogebra a partir de la medida de sus lados" (GCABA, 2018c, p. 19)

Construcción de triángulos en GeoGebra a partir de las medidas de sus lados **Actividad 2**

Problema 3. Exploración de algunas herramientas de GeoGebra

a. Construyan un triángulo ABC de manera tal que las medidas de sus lados sean $\overline{AB}$=7 y $\overline{AC}$=3. Si mueven alguno de los vértices, ¿sigue siendo ABC un triángulo de lados 7 y 3? En caso de que se deforme, busquen otra manera de construirlo para que esto no suceda.

b. Realicen la siguiente construcción:
- Construyan un segmento $\overline{MN}$ de longitud 7 con la herramienta *Segmento de longitud dada*.
- Construyan una circunferencia de centro M y radio 3 con la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*.
- Marquen un punto P sobre la circunferencia con la herramienta *Punto*.
- Construyan el triángulo MNP con la herramienta *Polígono*.

c. Si se mueven los puntos M, N, P, ¿qué se mantiene y qué cambia en el triángulo MNP?

Lo anterior da pie a reflexionar sobre que, por un lado, existen infinitos triángulos que cumplen lo pedido y, por otro, es posible realizar una construcción que, sometida al desplazamiento, representa esos infinitos triángulos de dos lados con medida conocida.

Imagen 57. Sintetizar lo aprendido en la construcción de un triángulo a partir de la medida de sus lados (GCABA, 2018c, p. 25)

Sintetizar lo aprendido en los problemas **Actividad 3**

Problema 5. Construcción de un triángulo a partir de la medida de dos lados.

a. Construyan con el programa GeoGebra, de ser posible en cada caso, un triángulo cuyos lados tengan las medidas pedidas. En las construcciones logradas, comprueben si, al mover sus vértices, el triángulo sigue existiendo y conserva las medidas solicitadas. Completen con una cruz en la siguiente tabla cuáles pudieron realizar.

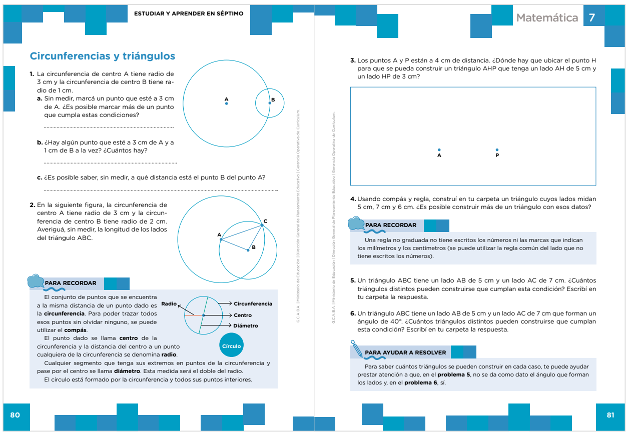
Construcción	Datos del triángulo	Sí, se puede construir	No se puede construir
5.1	$\overline{AB}$=9, $\overline{BC}$=2 y $\overline{AC}$=5		
5.2	$\overline{AB}$=10, $\overline{BC}$ =4		
5.3	$\overline{AB}$=9, $\overline{BC}$=6 y $\overline{AC}$=3		
5.4	$\overline{AB}$=8, $\overline{BC}$=5 y $\overline{AC}$=6		

b. Escriban y compartan un instructivo para cada una de las construcciones en un documento de texto. Expliquen por qué en algunos casos fue posible construir el triángulo y en otros no.

c. ¿Es posible que el triángulo del ítem 5.2 sea isósceles?

Se pretende que se analice si, al mover los vértices, cada triángulo sigue existiendo y conserva las medidas de sus lados. En este sentido, se fortalece la idea de la relación de medida longitudinal que garantiza la existencia de un triángulo aun con el desplazamiento, contrario a la idea intuitiva de un triángulo como la unión de tres segmentos. Asimismo, se favorece el desarrollo de la percepción y visualización espacial que permita el tránsito de la concepción de un dibujo triangular a las relaciones de medida de los lados que garantizan la existencia de la figura triángulo.

En el documento *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, pp. 80 y 81) se plantean algunas actividades que apuntan a la consolidación de la construcción de triángulos (existencia) a partir del análisis de las propiedades de medida de sus lados y ángulos, así como el análisis de la posibilidad de construcción (unicidad) de uno o varios triángulos dado un conjunto de datos.



ESTUDIAR Y APRENDER EN SÉPTIMO

Circunferencias y triángulos

1. La circunferencia de centro A tiene radio de 3 cm y la circunferencia de centro B tiene radio de 1 cm.

a. Sin medir, marcá un punto que esté a 3 cm de A. ¿Es posible marcar más de un punto que cumpla estas condiciones?

b. ¿Hay algún punto que esté a 3 cm de A y a 1 cm de B a la vez? ¿Cuántos hay?

c. ¿Es posible saber, sin medir, a qué distancia está el punto B del punto A?

2. En la siguiente figura, la circunferencia de centro A tiene radio de 3 cm y la circunferencia de centro B tiene radio de 2 cm. Averiguá, sin medir, la longitud de los lados del triángulo ABC.

PARA RECORDAR

El conjunto de puntos que se encuentra a la misma distancia de un punto dado es la **circunferencia**. Para poder trazar todos esos puntos sin olvidar ninguno, se puede utilizar el **compás**.

El punto dado se llama **centro** de la circunferencia y la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia se denomina **radio**.

Cualquier segmento que tenga sus extremos en puntos de la circunferencia y pase por el centro se llama **diámetro**. Esta medida será el doble del radio.

El círculo está formado por la circunferencia y todos sus puntos interiores.

80

Matemática 7

3. Los puntos A y P están a 4 cm de distancia. ¿Dónde hay que ubicar el punto H para que se pueda construir un triángulo AHP que tenga un lado AH de 5 cm y un lado HP de 3 cm?

4. Usando compás y regla, construí en tu carpeta un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 7 cm y 6 cm. ¿Es posible construir más de un triángulo con esos datos?

PARA RECORDAR

Una regla no graduada no tiene escritos los números ni las marcas que indican los milímetros y los centímetros (se puede utilizar la regla común del lado que no tiene escritos los números).

5. Un triángulo ABC tiene un lado AB de 5 cm y un lado AC de 7 cm. ¿Cuántos triángulos distintos pueden construirse que cumplan esta condición? Escribí en tu carpeta la respuesta.

6. Un triángulo ABC tiene un lado AB de 5 cm y un lado AC de 7 cm que forman un ángulo de 40°. ¿Cuántos triángulos distintos pueden construirse que cumplan esta condición? Escribí en tu carpeta la respuesta.

PARA AYUDAR A RESOLVER

Para saber cuántos triángulos se pueden construir en cada caso, te puede ayudar prestar atención a que, en el **problema 5**, no se da como dato el ángulo que forman los lados y, en el **problema 6**, sí.

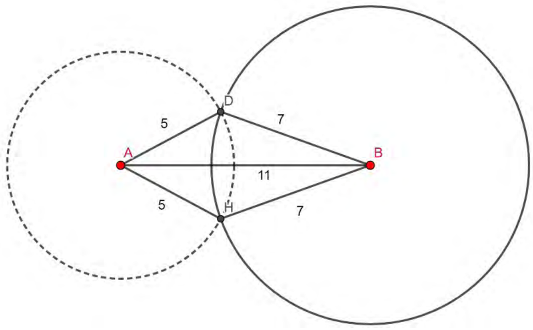
81

"Circunferencias y triángulos",
Estudiar y aprender en Séptimo
(GCABA, 2023f, pp. 80 y 81)
https://bit.ly/3ToqrS9

De esta manera conviene enfatizar que:

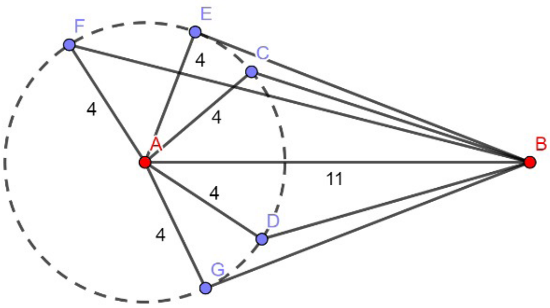
- Dadas las medidas de los tres lados, solo se puede construir un triángulo, incluyendo a la réplica de este triángulo, que se genera en posición contraria por la construcción misma.

Imagen 58. Ejemplo de la construcción de un triángulo dada la medida de sus tres lados



- Con las medidas de dos de los lados, se puede construir una variedad de triángulos.

Imagen 59. Ejemplo de la construcción de triángulos dada la medida de dos de sus lados



- Con las medidas de dos de sus lados y la medida del ángulo entre estos, se restringen las opciones, ya que la abertura angular específica garantiza una medida específica para el tercer lado del triángulo y, por lo tanto, solo se puede construir un triángulo con esta información.

Se cierra el segundo ciclo del nivel primario fortaleciendo la construcción de triángulos a partir de datos dados y de solicitar los datos que se requieren para asegurar su construcción única (existencia y unicidad triangular). Para ello, se trabaja en dos direcciones.

En la primera parte de la actividad, se pretende establecer la posibilidad de construcción de un triángulo dadas las medidas de tres lados o de dos lados, usando la propiedad triangular, así como las propiedades de la circunferencia. En particular, la **actividad 5** promueve el establecimiento de un rango de medidas que puede tener un lado del triángulo a partir de la medida de los otros dos lados, empleando la propiedad triangular.

Imagen 60. “Nuevas construcciones de triángulos”, *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f, p. 82)

5. Un triángulo tiene un lado de 7 cm y otro de 4 cm. Decidí con un/a compañero/a cuánto tiene que medir el tercer lado como mínimo para que exista el triángulo. Explicá por qué y construí el triángulo.

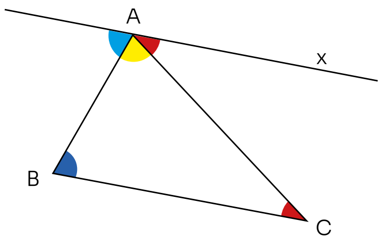
En la segunda parte de la actividad, se requiere del establecimiento de la posibilidad de construcción de un triángulo dadas tres informaciones, ya sea un ángulo y dos lados o bien dos ángulos y un lado. Es preciso concluir que:

1. Dados un ángulo y dos lados, se podrá garantizar la construcción de un único triángulo si el ángulo está comprendido entre los dos lados, ya que el ángulo con medida dada asegura la medida del tercer lado del triángulo.

2. Dados dos ángulos y un lado, se podrá garantizar la construcción de un único triángulo si el lado está comprendido entre los dos ángulos, ya que las medidas angulares fijas también aseguran una medida fija para los lados contrarios a cada ángulo. De esta manera, se garantiza un único valor en la medida de cada uno de los tres lados del triángulo.

En este momento didáctico, se sugiere un análisis extra que aporte a consolidar la relación 2, por ejemplo, el siguiente:

Imagen 61. Ejemplo sugerido para trabajar la propiedad de la suma de ángulos internos del triángulo



¿Qué relación deben cumplir dos ángulos y un segmento para construir un triángulo?

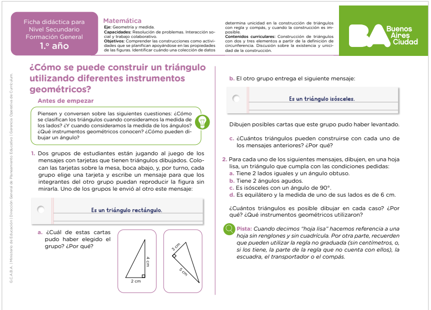
- Es posible construir un triángulo dados dos ángulos y un segmento entre esos ángulos siempre que la suma de dichos ángulos sea menor que 180°.
- Lo anterior es equivalente a la siguiente propiedad: la suma de las medidas de los tres ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180°.

En cualquiera de los casos, conviene enfatizar las relaciones de medida que garantizan la construcción y existencia del triángulo, a saber, la propiedad triangular y la suma de los ángulos internos del triángulo.

1.° año

Objetivo: elaboración de los criterios de congruencia de triángulos.

Se inicia el trabajo con la ficha didáctica *¿Cómo se puede construir un triángulo utilizando diferentes instrumentos geométricos?* (GCABA, s/f d) para 1.° año del nivel secundario. En esta se analiza la posibilidad de que una familia de triángulos de distintas formas comparta ciertas características respecto a sus medidas de lados y/o ángulos.

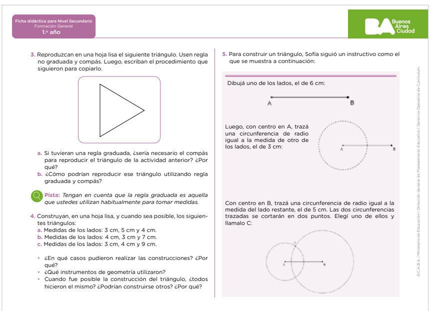


¿Cómo se puede construir un triángulo utilizando diferentes instrumentos geométricos? (GCABA, s/f d, p. 1)
https://bit.ly/3VdOcxB

En este momento, será importante explicitar la posibilidad de construcción de más de un triángulo que cumpla las condiciones de medida o bien de discutir sobre la modificación de la posición de los triángulos en la hoja lisa, así como de solicitar que la/el estudiante pueda elegir las medidas siempre que respeten las condiciones planteadas.

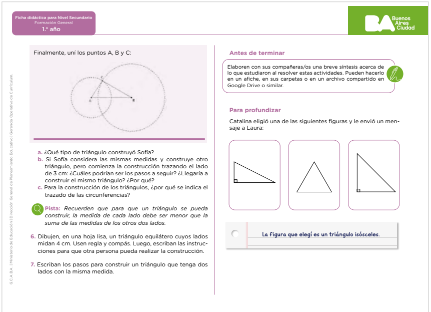
Nota: en este momento se sugiere trabajar con el material propuesto en el documento *Matemática. Geometría*, en particular con los problemas 1, 2 y 3 del capítulo 2 (pp. 34-37), ya que se promueve y profundiza la exploración de la existencia y unicidad del triángulo y de la desigualdad triangular.

En la **actividad 5** de la ficha didáctica (GCABA, s/f d, p. 2), se pretende fomentar el análisis del proceso de construcción del triángulo empleando regla y compás, por lo que es indispensable retomar la conceptualización de la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que mantienen la misma distancia respecto a un punto fijo (centro).



¿Cómo se puede construir un triángulo utilizando diferentes instrumentos geométricos? (GCABA, s/f d, p. 2)
https://bit.ly/3OTVxht

En este momento conviene consolidar la propiedad triangular como la relación de medida que asegura la existencia del triángulo como figura geométrica (GCABA, s/f d, pp. 3 y 4).



¿Cómo se puede construir un triángulo utilizando diferentes instrumentos geométricos? (GCABA, s/f d, pp. 3 y 4)
https://bit.ly/42UWhsy

Dos énfasis didácticos a propósito de estas actividades son:

a. La destreza en el uso de la regla y el compás para la construcción de triángulos.

b. La descripción de la construcción de la figura triangular favorece la conceptualización de las relaciones de medida que caracterizan y dan identidad a un triángulo como objeto teórico de la geometría.

De esta manera, se abre paso a una reflexión sobre las distintas situaciones que pueden presentarse cuando se requiere construir un triángulo dada una colección de datos. Una síntesis se propone en el capítulo 2 del documento *Matemática. Geometría* (p. 41) (ver **Tabla 22** de este documento).

Por lo tanto, se fomenta la idea fuerza de concebir los criterios de congruencia entre triángulos como las relaciones de medida mínimas para la construcción de un triángulo equivalente tanto en forma como en medidas.

Para consolidar la construcción de triángulos en este año, se sugiere el empleo de las actividades del capítulo 2, “Un tipo de tarea: Las construcciones”, del material *Matemática. Geometría* (2007). Aunque este material es para primer año, se propone su uso tanto en primer año como en segundo año del nivel secundario.

A continuación, se presenta un recuadro a modo de síntesis de la distribución, el orden y el año sugerido para su implementación (se usa la nomenclatura de P1 para referirse al Problema 1, y así sucesivamente).

Tabla 24. Sugerencia de distribución para la implementación de las actividades del capítulo 2, “Un tipo de tarea: Las construcciones”, del material *Matemática. Geometría* (2007)

	Apartado 1 **Elaboración de criterios**	**Apartado 2** **Construcciones con regla y compás**	**Apartado 3** **Construcciones imposibles**
1.º año	▪ Construcciones a partir de lados: P1, P2 y P3. ▪ Construcciones a partir de ángulos: P4 y P5. ▪ Construcciones a partir de lados y ángulos: P6 y P7. ▪ Recuadro de síntesis: p. 41 ▪ Elaboración de criterios: P8.	▪ Construcciones con regla no graduada y compás: P13 y P14.	▪ Construcciones imposibles: P17 y P18.
2.º año	▪ Elaboración de criterios: P8. ▪ Construcciones a partir de otros juegos de datos: P9, P10, P11 y P12.	▪ Construcciones con regla no graduada y compás: P15 y P16.	▪ Construcciones imposibles: P19.

Unidad de análisis	Primaria		Secundaria	
Nivel	**6.°**	**7.°**	**1.°**	**2.°**
Objetivo del año escolar	Construcción de triángulos usando diferentes informaciones e instrumentos.	Análisis de la construcción de un triángulo, de la posibilidad de su construcción y de si es única.	Elaboración de los criterios de congruencia de triángulos.	Empleo de los criterios de congruencia de triángulos para nuevas construcciones.
Ideas fuerza	• Identificar la forma geométrica triangular y los elementos que la constituyen: lados, ángulos, vértices. • Medir como actividad de comparación o sobreposición. • Distinguir entre dibujo, forma y figura. • Emplear los instrumentos, como la regla y el compás, para la construcción de la figura triangular. • Movilizar la percepción y visualización espacial.	• Determinar las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. • Decidir la verdad o falsedad de alguna afirmación de construcción. • Elaborar argumentos que fundamenten la validez del procedimiento de construcción. • Inferir las características invariantes de un triángulo: desigualdad triangular y suma de sus ángulos internos. • Movilizar la percepción y visualización espacial.	• Reconocer a las construcciones como actividad geométrica de relacionar propiedades y construir nuevas. • Construir un triángulo como una tarea que permite conceptualizar a la figura triangular. • Enunciar y validar o descartar afirmaciones de construcción de triángulos. • Concebir los criterios de congruencia entre triángulos como las relaciones de medida mínimas para la construcción de una réplica del triángulo. • Dominar el uso de instrumentos como regla graduada, compás, semicírculo y escuadra. • Permitir que los saberes geométricos aparezcan como instrumentos en la resolución de problemas que no pueden ser resueltos con la percepción ni la medición.	• Argumentar y validar un procedimiento de construcción mediante el uso de los criterios de congruencia de triángulos. • Validar la respuesta dada a un problema, es decir, decidir de forma autónoma por parte de la/el estudiante acerca de la verdad o falsedad de su respuesta. • Transitar entre dos conceptualizaciones del triángulo como figura geométrica: como unión de tres puntos no colineales y como relación de medida. • Distinguir la actividad aritmética de la actividad geométrica. • Promover las habilidades de percepción y la visualización.
Preguntas clave	• ¿Qué propiedades geométricas garantizan que la construcción de un triángulo con regla y compás sea válida?	• ¿Qué información geométrica es necesaria y suficiente para garantizar la construcción de un triángulo?	• ¿Cuáles son las condiciones de medida necesarias y suficientes para garantizar la construcción de un triángulo que sea réplica de uno dado?	• ¿Por qué uno de los criterios de congruencia de triángulos permite validar, sin necesidad de una comprobación empírica, una construcción nueva y más elaborada?
Materiales propuestos	• *Estudiar y aprender en Sexto* (GCABA, 2023e)	• *Matemática. Construcción de triángulos con GeoGebra. Séptimo grado* (GCABA, 2018c) • *Estudiar y aprender en Séptimo* (GCABA, 2023f)	• *¿Cómo se puede construir un triángulo utilizando diferentes instrumentos geométricos?* Ficha didáctica para nivel secundario. 1.° año (GCABA, s/f d) • *Matemática. Geometría*, "Capítulo 2. Un tipo de tarea: las construcciones", problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 17 y 18 (GCABA, 2007)	• *Matemática. Geometría*, "Capítulo 2. Un tipo de tarea: las construcciones", problemas 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16 y 19 (GCABA, 2007)

Bibliografía

Documentos de diseño curricular

GCABA (2001). *Actualización Curricular. 7.º grado. Documento de Trabajo*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

GCABA (2004). *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Primer ciclo de la Escuela Primaria. Educación General Básica*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Secretaría de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

GCABA (2012). *Diseño Curricular para la Escuela Primaria: Segundo ciclo de la Escuela Primaria: Educación General Básica (Tomo 2)*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Dirección de Currícula.

GCABA (2014). *Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* (1.ª ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2015). *Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico* (2.ª ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2019a). *Progresiones de los aprendizajes. Segundo ciclo. Matemática*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa.

GCABA (2020). *Progresiones de los aprendizajes: Matemática: Educación Secundaria: Ciclo Básico*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa.

GCABA (2021a). *Estudiar y aprender. 1.º año. Tomo 1*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2021b). *Estudiar y aprender. 1.º año. Tomo 2*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2021c). *Estudiar y aprender. 2.º año. Tomo 1*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2021d). *Estudiar y aprender. 2.º año. Tomo 2*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2023a). *Matemática. Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria. Recomendaciones para la implementación de los materiales de trabajo para séptimo grado y primer año* (1.ª ed. para el profesor). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2023b). *Estudiar y aprender en Tercero*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2023c). *Estudiar y aprender en Cuarto*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2023d). *Estudiar y aprender en Quinto*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2023e). *Estudiar y aprender en Sexto*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2023f). *Estudiar y aprender en Séptimo*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (2023g). *Matemática. Estudiar y aprender: un puente entre primaria y secundaria. Material de trabajo para estudiantes de séptimo grado y primer año* (1a ed. para el alumno). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Gerencia Operativa de Currículum.

Capítulo 1. Múltiplos y divisores

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica*. Universidad Autónoma de Yucatán.

Apostol, T. (1980). *Introducción a la teoría analítica de números*. Barcelona: Reverté.

Campoy-Calzado, D. (2019). *La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en educación secundaria obligatoria*. [Tesis de Maestría]. Universidad de Jaén.

Fernandez, J. A. (2007). "La enseñanza de la multiplicación aritmética: Una barrera epistemológica". *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 119-130.

GCABA (2018a). *Matemática. Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Séptimo grado*. (1.ª ed. para el profesor). Ciudad de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa.

GCABA (2019b). *Matemática. Divisibilidad: múltiplos y divisores. Sexto grado*. (1.ª ed. para el profesor). Ciudad de Buenos Aires: Ministerio de Educación e Innovación.

López, A. (2015). *Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza*. [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). "Awareness of pattern and structure in early mathematical development". *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49.

Negrete, F. G. (2023). "Argumentos puestos en juego por estudiantes ingresantes a primer año de la Educación Secundaria en el marco de actividades sobre divisibilidad, durante el período de ambientación". *Clave Didáctica. Revista de Investigación y experiencias Didácticas*, 7.

Sánchez, L. (2013). "Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos". SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (p. 1121-1131). Montevideo: SEMUR.

Vergnaud, G. (2000). *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.

Warusfel, A. (1972). *Diccionario razonado de matemáticas: de las matemáticas clásicas a la matemática moderna*. Madrid: Tecnos.

Capítulo 2. Producción de fórmulas

Arcavi, A. (1994). "Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics". *For the Learning of Mathematics* *14*(3), 24-35.

Dougherty, B., Pedrotty, D., Bryant, B., Darrough, R. y K Hughes, K. (2015). "Developing Concepts and Generalizations to Build Algebraic Thinking: The Reversibility, Flexibility, and Generalization Approach". *Intervention in School and Clinic*. *50*(5), pp. 273-281.

GCABA (2018b). *Matemática y programación. Un desafío en el patio. Primer año*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

GCABA (s/f a). *¿Utilizamos algún procedimiento para contar? Ficha didáctica para nivel secundario. Formación General. 1.° año*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

López-Acosta, L. A. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria hipotética de aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional*. [Tesis de Maestría no publicada]. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

López-Acosta, L. A. (2023). *Análisis algebraico de Viète y Descartes: La ecuación paramétrica y la algebrización de la geometría. Un acercamiento epistemológico y lingüístico-multisemiótico*. [Tesis Doctoral]. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/4291

López-Acosta, L. A. y Montiel-Espinosa, G. (2022). "Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes. Elementos para repensar la actividad analítica-algebraica". *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 17*(3), pp. 539-559. https://doi.org/10.14483/23464712.17062

Mason, J. (1996). "Expressing generality and roots of algebra". En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (p. 64-86). Kluwer.

Massa-Esteve, M. (2006). "Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625–1686)". *Historia Mathematica, 33*, 82–112.

Parodi, S. (2016). *Significados del signo de igual en la entrada al álgebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria*. [Tesis de Maestría no publicada]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics*. Springer.

Schou, M. H., Bikner-Ahsbahs, A. (2022). "Unpacking hidden views: seven ways to treat your formula". *Educational Studies in Mathematics, 109*, 639-659. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10092-7

Serres, Y. (2007). "Ejercicios, problemas y modelos en la enseñanza del Álgebra". En R. Cantoral, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoaméricano* (pp. 163-178). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.-Díaz de Santos.

Viète, F. (1591). *In artem analyticem isagoge: seorsim excussa ab Opere restitutae mathematicae analyseos, seu Algebra nova*.

Capítulo 3. Función lineal

Caballero-Pérez, M. y Moreno-Durazo, G. (2017). "Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, 1066-1074.

Campeón, M., Aldana, E. y Villa, J. (2018). "Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones". *Sophia, 14*(2), 115-126.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). "Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio". *Revista EMA, 8*(2), 121-156.

Córdoba, L., Díaz, M. E., Haye, E. E., y Montenegro, F. (2015). "Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas". *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 41*, 20-38.

GCABA (s/f b). *¿Qué características tienen las funciones que crecen linealmente?* Ficha didáctica para nivel secundario. Formación General. 1.° año. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

GCABA (s/f c). *¿De qué hablamos cuando hablamos de crecimiento lineal?* Ficha didáctica para nivel secundario. Formación General. 2.° año. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

Grueso, R. (2019). "El concepto de función como covariación en la escuela secundaria". *XV CIAEM*, 1-8.

Hitt, F. (1998). "Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function". *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), pp. 123-134.

Lobato, J., y Thanheiser, E. (2002). "Developing understanding of ratio as measure as a foundation for slope", en Litwiller, B. (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*: *2002 Yearbook* (pp. 162-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019). *Aproximar y optimizar. ¿Qué hacés con lo que sobra?* Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología.

Thompson, P. W. (1993). "Quantitative reasoning, complexity, and additive structures". *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 165-208.

Capítulo 4. Construcción de triángulos

Alsina, C., Brugués, C. y Fortuny, J. (2017). *Invitación a la didáctica de la geometría*. España: Síntesis.

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L., & Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica*. Universidad Autónoma de Yucatán.

Castillo, V. (2015). *Secuencia didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud con estudiantes de educación primaria*. [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica de Perú.

Duval, R. (1999). "Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Math-ematical Thinking". En F. Hitt y M. Santos (eds.). *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26). Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE

GCABA (2007). *Matemática. Geometría* (coord. Cappelletti, G.) (1.ª ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Dirección General de Planeamiento del Ministerio de Educación.

GCABA (2018c). *Matemática. Construcción de triángulos con GeoGebra. Séptimo grado* (1.ª ed. para el profesor). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación e Innovación.

GCABA (s/f d). *¿Cómo se puede construir un triángulo utilizando diferentes instrumentos geométricos?* Ficha didáctica para nivel secundario. Formación General. 1.° año. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, Gerencia Operativa de Currículum.

GCBA (1998). *Matemática. Documento de trabajo n.° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Dirección General de Planeamiento de la Secretaría de Educación.

Godino, J. y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Gómez-Osalde, K., Sosa, L. y Aparicio, E. (2020). "Experiencias de aprendizaje y reconceptualización geométrica: una propuesta para la reorganización de la práctica docente". En *Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 3 [recurso eletrônico]*. Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. Ponta Grossa, PR: Atena. https://www.atenaeditora.com.br/post-artigo/38861

Martínez, M. y Mohan, D. (2018). *Matemáticas I. Serie INNOVAT*. México: Innova.

Buenos
Aires
Ciudad