Actividades resueltas
Estudiar y Aprender, Primer año, Nivel Secundario. Tomo 1, Proporcionalidad.

Problemas de proporcionalidad directa
Intencionalidad de la sección

La presente sección del texto tiene como intención que las y los estudiantes recuperen las propiedades que caracterizan a la relación de proporcionalidad directa. Entre las posibles estrategias para abordar cada una de las actividades se trabajarán los razonamientos aditivo compuesto, multiplicativo e inter, los cuales podrán ser trabajados de manera conjunta en distintas actividades. Es importante aclarar que el material de Estudiar y Aprender para 1er año cuenta con “Pistas para resolver” las actividades. Por tanto, lo que se propondrá en esta sección será complementar dichas pistas con explicaciones que articulen lo trabajado en años anteriores (6to y 7mo grado de educación primaria) que puedan considerarse para retomar las argumentaciones. En suma, lo que se pretende es recuperar aquello que posiblemente se haya trabajado en los años anteriores para promover la articulación hacia lo que corresponde a este año escolar en particular.

Actividad 1

Actividad 1

Un vendedor mayorista de artículos de librería prepara cajas con cuadernos para repartir entre los comercios. El lunes pasado armó 6 cajas iguales usando 84 cuadernos.

a. Para la semana que viene necesita armar 12 cajas con la misma cantidad de cuadernos en cada una, iguales a las del envío anterior. ¿Cuántos cuadernos va a necesitar?
b. ¿Y si fueran 18 cajas? ¿Y si fueran 24?

Intencionalidad de la actividad

Para la resolución de la actividad se solicita calcular la cantidad de cuadernos o cajas de cuadernos, según corresponda, donde se potencia el trabajo con el razonamiento aditivo compuesto y el razonamiento inter. Por un lado, encontraremos cantidades cuyos valores corresponden a adiciones de valores dados, por ejemplo: 12 corresponde a la suma de 6 y 6; 18 corresponde a la suma de 12 y 6; y 24 corresponde a la suma de 12 y 12, o bien, de 6 y 18. En todos estos casos, el razonamiento aditivo compuesto estará en la estrategia para la respuesta brindada. Por el otro, está la posibilidad de resolver la actividad mediante el razonamiento inter, es decir, retomando la idea de que los valores solicitados son múltiplos del valor inicial de cajas y, por lo tanto, los cuadernos correspondientes también corresponden a múltiplos del primer valor proporcionado.

Inciso a) y b)

Estrategia 1 (primera propuesta de “Pista”)

- Para resolver este problema, te puede ayudar tener en cuenta que 12 es el doble de 6; por eso, para 12 cajas iguales a las anteriores, se van a necesitar el doble de cuadernos, es decir: $84 \times 2 = 168$ cuadernos. De modo similar, te puede servir usar que 18 es el triple de 6 y que 24 es el doble de 12.

La relación inicial que se brinda como dato es que para 6 cajas se tienen 84 cuadernos. Si se necesita, para el caso del inciso a), armar 12 cajas, de las cuales se especifica que contendrán la misma cantidad de cuadernos cada una, se está solicitando el doble de cajas y, por tanto, el doble de cuadernos.

Para el caso del inciso b), se solicitan 18 o 24 cajas, es decir, del dato original, el triple o el cuádruple.
Si las y los estudiantes propusieran esta estrategia, estaríamos presenciando el uso de un razonamiento inter que, durante la escuela primaria, se ha presentado mediante tablas de la siguiente manera:

x4
x3
x2 x2

Cantidad de cajas	6	12	18	24
Cantidad de cuadernos	84	168	252	336

x2 x2
x3
x4

La representación tabular podría ser un elemento de anclaje para retomar en el primer año escolar de educación secundaria, pues podrían recordar estrategias usadas previamente.

Estrategia 2

- Otra estrategia para pensar este problema puede ser calcular primero la cantidad correspondiente a una caja con una división: 84 : 6 = 14. Con este resultado ya sabemos que para armar una caja se necesitan 14 cuadernos. Ahora podemos usar este dato para resolver todas las preguntas.
  Por ejemplo, para saber cuántos cuadernos se necesitan para 18 cajas hacemos 14 × 18 = 252 cuadernos.

Esta estrategia corresponde a calcular cuántas unidades de cuadernos se necesitan para elaborar una caja, lo que también se conoce como “reducción a la unidad”.

Se debe dividir la cantidad de cuadernos que se necesitan para armar 6 cajas -que corresponde a 84- entre 6, para encontrar cuánto se necesita para armar solo una caja.

$$Cantidad\ de\ cuadernos\ en\ 1\ caja: \frac{Cantidad\ de\ cuadernos\ en\ 6\ cajas}{6}$$

$$Cantidad\ de\ cuadernos\ en\ 1\ caja: \frac{84}{6}$$

$$Cantidad\ de\ cuadernos\ en\ 1\ caja: 14$$

Se necesitan 14 cuadernos para armar cada caja. Con este dato, es suficiente con multiplicar este valor por la cantidad de cajas que se quieran armar. Por ejemplo, si necesitamos armar 12 cajas la expresión sería:

$$Cuadernos\ para\ 12\ cajas: Cuadernos\ para\ 1\ caja\ \cdot 12$$

$$Cuadernos\ para\ 12\ cajas: 14\ \cdot\ 12$$

$$Cuadernos\ para\ 12\ cajas:\ 168$$

Por lo tanto, se necesitan 168 cuadernos para armar 12 cajas.

Inciso b)

Estrategia 1

Se puede considerar que se tiene el dato para 6 cajas de cuadernos y están solicitando el dato para 18 cajas (el triple de cajas) y para 24 cajas (el cuádruple de cajas). Con base en este dato y reconociendo el razonamiento inter, o bien, la idea de que al cuádruple de una magnitud le corresponde el cuádruple de la otra, se pueden encontrar los valores de la cantidad de cuadernos.

x4
x3

Cantidad de cajas	6	6x2=12	6x3=18	6x4=24
Cantidad de cuadernos	84	84x2=168	84x3=252	84x4=336

x3
x4

Nótese en esta manera de presentar la tabla (vertical). Podría contribuir a analizar la manera en la que se estudian las relaciones de la representación tabular de pares de valores ya que, en la estrategia anterior, se usó la misma idea de tabla, solo que en horizontal.

Estrategia 2

En el inciso a) se pudo calcular que la cantidad de cuadernos necesarios para 1 caja son 14 cuadernos, con este dato se puede calcular cuántos cuadernos se necesitan para 18 y 24 cajas, multiplicando por dichos valores:

Para 18 cajas:

$$Cuadernos\ para\ 18\ cajas: Cuadernos\ para\ 1\ caja\ \cdot 18$$

$$Cuadernos\ para\ 18\ cajas: 14 \cdot 18$$

$$Cuadernos\ para\ 18\ cajas: 252$$

Para 24 cajas:

$$Cuadernos\ para\ 24\ cajas: Cuadernos\ para\ 1\ caja\ \cdot 24$$

$$Cuadernos\ para\ 24\ cajas: 14\ \cdot\ 24$$

$$Cuadernos\ para\ 24\ cajas: 336$$

Así, se necesitan 252 y 336 cuadernos para 18 y 24 cajas, respectivamente.

Estrategia 3

Una tercera estrategia corresponde a utilizar lo que se calculó en el inciso a), es decir, considerar que 18 cajas corresponde a la suma de 6 y 12 cajas, por lo tanto, se puede calcular la cantidad de cuadernos necesarios para 18 cajas mediante la suma de la cantidad de cuadernos para 6 cajas y para 12 cajas. En el caso de 24 cajas, se puede considerar lo correspondiente a 18 y a 6 cajas, que corresponde a 336 cuadernos.

Actividad 2

Actividad 2

Completá la siguiente tabla teniendo en cuenta que todas las cajas contienen la misma cantidad de carpetas. Anotá cómo pensaste para completar cada casilla.

Cantidad de cajas	2	4	8	12	16	40
Cantidad de carpetas		96				

Intencionalidad de la actividad

Se propone una tabla de valores cuyos valores pertenecen al campo numérico de los números naturales y se puede operar entre ellos para encontrar los valores faltantes. A diferencia de la actividad anterior, en esta se hace explícita la representación tabular para su abordaje. En particular, la tabla contiene el dato de una relación (4 cajas y 96 carpetas), se indica que tienen todas las cajas la misma cantidad de carpetas y no se brinda, en la tabla, el dato para encontrar el valor unitario. Se espera que puedan usarse el pensamiento aditivo compuesto y el inter de manera directa, ya que todos los datos desconocidos son en particular, múltiplos de 4 (cantidad de cajas que se brinda como dato).

Un dato de importancia para reflexionar con las y los estudiantes es la indicación de que "todas las cajas contienen la misma cantidad de carpetas". Es importante volver sobre este asunto para potenciar qué es lo que caracteriza a una relación de proporcionalidad directa y por qué se podrían usar las propiedades correspondientes.

Estrategia 1

Ya que todas las cajas contienen la misma cantidad de carpetas, se puede afirmar que la relación entre la cantidad de cajas y la cantidad de carpetas es de proporcionalidad directa, es decir, cumple con las propiedades que estuvieron trabajándose hasta el momento.
Notemos que todos los valores de cajas que suceden al par ordenado que se proporciona en la tabla (4 cajas) corresponden a múltiplos de 4, y el único valor que lo antecede corresponde exactamente a la mitad, por lo que, atendiendo a la pista que se proporciona en la actividad, podemos trabajar a partir de las carpetas necesarias para 4 cajas para obtener las demás:

Cantidad de cajas	2	4	8	12	16	**40**
Cantidad de carpetas	**48**	96	**192**		**384**	

Tanto la presentación que se trabaja, como las estrategias, se corresponden con el abordaje de 6to y 7mo grado de primaria, por lo cual, se recomienda indagar si las y los estudiantes recuerdan haber realizado actividades de este tipo en años escolares anteriores.

Mediante el diagrama, podemos obtener cada uno de los valores necesarios, sin embargo, aún no se proporciona el valor correspondiente a 12 cajas, por lo que nos centraremos en este valor:

Veamos que 12, corresponde a exactamente el triple de 4, por lo que en primera instancia podemos multiplicar por 3 la cantidad de carpetas necesarias para 12 cajas, esto es:

$$Carpetas\ para\ 12\ cajas: Carpetas\ para\ 4\ cajas\ \cdot 3$$

$$Carpetas\ para\ 12\ cajas: 96 \cdot 3$$

$$Carpetas\ para\ 12\ cajas: 288$$

Por otra parte, podemos ver que 12 cajas, además, corresponden a la suma de 8 cajas y 4 cajas, por lo que otra opción viable corresponde a sumar las carpetas necesarias para armar 8 cajas y las carpetas necesarias para armar 4 cajas, así:

“la cantidad de carpetas para 12 cajas es igual a
la cantidad de carpetas para 8 cajas más la cantidad de carpetas para 4 cajas”

$$96 + 192\ =\ 288$$

De ambas formas, se obtiene que para armar 12 cajas se necesitan 288 carpetas, con lo que la tabla finalmente queda estructurada de la siguiente manera:

Cantidad de cajas	2	4	8	12	16	40

Cantidad de carpetas	48	96	192	288	384	960

Estrategia 2

Otra opción corresponde a encontrar la cantidad de carpetas necesarias para armar una caja, es decir, el valor unitario. Para esto se debe dividir la cantidad de las carpetas, 96, entre la cantidad de cajas, 4, que es el dato que se brinda en el enunciado:

$$Cantidad\ de\ carpetas\ en\ 1\ caja: \frac{Cantidad\ de\ carpetas\ en\ 4\ cajas}{4\ cajas}$$

$$= \frac{96}{4}$$

$$= 24$$

Se necesitan 24 carpetas para armar una caja, por lo tanto, se debe multiplicar el valor correspondiente a la cantidad de carpetas que hay en una caja (24 carpetas), por la cantidad de cajas necesarias:

Para 2 cajas:

$$Carpetas\ para\ 2\ cajas: Carpetas\ para\ 1\ caja\ \cdot 2$$

$$= 24 \cdot 2$$

$$= 48$$

Para 8 cajas:

$$Carpetas\ para\ 8\ cajas: Carpetas\ para\ 1\ caja\ \cdot 8$$

$$= 24 \cdot 8$$

$$= 192$$

Entonces, repitiendo este razonamiento podremos completar la cantidad de carpetas necesaria para armar 12, 16 y 40 cajas.

Estrategia 3

Ya establecimos que la relación entre la cantidad de cajas y la cantidad de carpetas corresponde a una relación de proporcionalidad directa, por lo tanto, para completar la tabla una estrategia válida es usar la regla de 3 simple. Para encontrar el valor faltante de cada par ordenado podemos utilizar uno que ya haya sido proporcionado, por ejemplo, calcularemos la cantidad de carpetas necesaria para armar 16 cajas, sabiendo que para 4 cajas se utilizan 96 carpetas:

$$\frac{4\ cajas}{96\ carpetas} = \frac{16\ cajas}{x}$$

$$x = \frac{16\ cajas\ \cdot 96\ carpetas}{4\ cajas}$$

$$x = 384\ carpetas$$

De esta forma, se logra completar la tabla mediante la regla de 3 simple.

Actividad 3

Actividad 3

En una receta de cocina se dice que se necesitan 800 gramos de harina para preparar 2 pizzas.

a. ¿Qué cantidad de harina se necesita para 4 pizzas?
b. ¿Y para 6 pizzas? ¿Y para 12 pizzas?

Intencionalidad de la actividad

La intención es que, nuevamente, sin la representación tabular, se pueda calcular las cantidades correspondientes a ciertos datos dados, con base en una relación de magnitudes original: 800 gramos por cada 2 pizzas.

Estrategia 1

Para resolver el ejercicio, una primera estrategia corresponde a calcular la constante de proporcionalidad, es decir, la cantidad de harina necesaria para preparar una pizza.

$$Cantidad\ de\ harina\ \ necesaria\ para\ 1\ pizza : \frac{Cantidad\ de\ harina\ necesaria\ para\ 2\ pizzas}{2\ pizzas}$$

Esto es:

$$x = \frac{800\ g}{2}$$

$$x = 400\ g$$

De esta manera, se sabe que para preparar una pizza son necesarios 400 gramos de harina, ahora bien, si queremos preparar 4 pizzas, solo debemos multiplicar esta cantidad por las 4 pizzas requeridas:

$$Cantidad\ de\ harina\ \ necesaria\ para\ 4\ pizzas:\ Cantidad\ de\ harina\ \ necesaria\ para\ 1\ pizza\ \cdot\ 4\ pizzas$$

$$x = 400\ g\ \cdot\ 4$$

$$x = 1.600\ g$$

Se necesitan 1.600 gramos para preparar 4 pizzas.

Para calcular la cantidad de harina necesaria para preparar 6 y 12 pizzas, se debe multiplicar la constante de proporcionalidad por 6 y 12, respectivamente:

$$Cantidad\ de\ harina\ \ necesaria\ para\ 6\ pizzas: Cantidad\ de\ harina\ \ necesaria\ para\ 1\ pizza\ \cdot\ 6$$

$$x = 400\ g \cdot\ 6$$

$$x = 2.400\ g$$

Se necesitan 2.400 gramos para preparar 6 pizzas.

$$Cantidad\ de\ harina\ \ necesaria\ para\ 12\ pizzas\ :\ Cantidad\ de\ harina\ \ necesaria\ para\ 1\ pizza\ \cdot 12\ pizzas$$

$$x = 400\ g\ \cdot\ 12$$

$$x = 4.800\ g$$

Y finalmente, se necesitan 4.800 gramos de harina para preparar 12 pizzas.

Estrategia 2

Una segunda estrategia, es que se note que 4, 6 y 12 corresponden a múltiplos de 2, por lo que no sería necesario calcular la constante de proporcionalidad, debido a que para preparar 4 pizzas, por ejemplo, podemos sumar dos veces lo necesario para preparar 2 pizzas, o bien, multiplicar este valor por 2, así:

$$Harina\ para\ 4\ pizzas = Harina\ para\ 2\ pizzas + Harina\ para\ 2\ pizzas$$

$$x = 800\ g + 800\ g$$

$$x = 1.600\ g$$

O bien:

$$Harina\ para\ 4\ pizzas = 2\ \cdot\ Harina\ para\ 2\ pizzas$$

$$x = 2\ \cdot\ 800\ g$$

$$x = 1.600\ g$$

Se obtienen 1.600 gramos para preparar 2 pizzas.

Para el caso del cálculo de harina necesaria para 6 pizzas, se puede considerar que 6 corresponde al triple de 2, por lo que la cantidad de harina también será el triple, esto debido a que la relación es de proporcionalidad directa:

$$Harina\ para\ 6\ pizzas: 3\ \cdot\ Harina\ para\ 2\ pizzas$$

$$x = 3\ \cdot\ 800\ g$$

$$x = 2.400\ g$$

De igual manera, 12 corresponde a 6 veces 2 pizzas, por lo que debemos multiplicar la cantidad de harina necesaria para preparar 2 pizzas, por 6:

$$Harina\ para\ 12\ pizzas: 6\ \cdot\ Harina\ para\ 2\ pizzas$$

$$x = 6\ \cdot\ 800\ g$$

$$x = 4.800\ g$$

Estrategia 3

Finalmente, otra opción es el razonamiento aditivo compuesto, para esto, podemos inicialmente construir una tabla para contribuya al análisis:

Cantidad de pizzas	2	4	6	12
Cantidad de harina necesaria (en gramos)	800	1.600	2.400	4.800

Notemos que cada elemento de la tabla se puede obtener a partir de sumas de elementos anteriores (a excepción de 2 que es la cantidad inicial), específicamente:

$$6 = 4 + 2$$

$$12 = 6 + 6 = 6 + 4 + 2$$

Lo que significa que se puede construir la tabla a partir de los datos encontrados anteriormente:

Para calcular la cantidad de harina necesaria para 6 pizzas, se utiliza la harina necesaria para 2 y 4 pizzas de la siguiente manera:

$$Harina\ para\ 6\ pizzas = Harina\ para\ 2\ pizzas + Harina\ para\ 4\ pizzas$$

$$x = 800\ g + 1.600\ g$$

$$x = 2.400\ g$$

Entonces, para preparar 6 pizzas se necesitan 2.400 g de harina.

Finalmente, para calcular la cantidad de harina necesaria para preparar 12 pizzas, podemos utilizar todo lo calculado anteriormente:

$$Harina\ para\ 12\ pizzas = Harina\ para\ 2\ pizzas + Harina\ para\ 4\ pizzas + Harina\ para\ 6\ pizzas$$

$$x = 800\ g + 1.600\ g + 2.400\ g$$

$$x = 4.800\ g$$

Actividad 4

Intencionalidad de la actividad

En este caso, se da la representación tabular como apoyo para el análisis de las relaciones. La intención es analizar qué estrategias se pusieron en juego para completar la tabla y, de esta manera, retomar las propiedades de la proporcionalidad directa a través de sus distintos razonamientos. Nótese la aclaración que se hace sobre "que todos los paquetes contienen la misma cantidad de caramelos", ya que podría ser una idea para discutir respecto a la condición necesaria para que sea una relación de proporcionalidad directa.

Actividad 4

Completá la siguiente tabla teniendo en cuenta que todos los paquetes contienen la misma cantidad de caramelos. Anotá cómo pensaste para completar cada casilla.

Cantidad de paquetes	5	10	20	40	50	100
Cantidad de caramelos	40					

Estrategia 1

Al notar que cada elemento corresponde a un múltiplo del primero, podemos utilizar el razonamiento inter, es decir, si a 5 paquetes le corresponden 40 caramelos, a (5*2) paquetes le corresponden (40*2) caramelos, por lo tanto:

La cantidad de caramelos necesarios para 10 paquetes corresponden al doble de la cantidad de los caramelos necesarios para 5 paquetes:

$$Caramelos\ para\ 10\ paquetes: 2\ \cdot\ Caramelos\ para\ 5\ paquetes$$

$$Caramelos\ para\ 10\ paquetes: 2 \cdot 40$$

$$Caramelos\ para\ 10\ paquetes: 80$$

También, los caramelos necesarios para 20 paquetes corresponden a 4 veces los caramelos necesarios para 5 paquetes:

$$Caramelos\ para\ 20\ paquetes = 4 \cdot Caramelos\ para\ 5\ paquetes$$

$$= 4 \cdot 40$$

$$= 160$$

Mediante el mismo razonamiento podemos calcular todos los datos solicitados en la tabla:

Cantidad de paquetes	5	10	20	40	50	100
Cantidad de caramelos	40	80	160	320	400	800

Estrategia 2

Nuevamente, podemos obtener cada elemento mediante la suma de elementos obtenidos anteriormente (razonamiento aditivo compuesto), esto es, para calcular la cantidad de caramelos necesaria para armar 10 paquetes, podemos sumar dos veces la cantidad de caramelos necesaria para 5 paquetes:

$$Caramelos\ para\ 10\ paquetes = Caramelos\ para\ 5\ paquetes + Caramelos\ para\ 5\ paquetes$$

$$x = 40 + 40$$

$$x = 80$$

Para armar 20 paquetes, podemos sumar 2 veces la cantidad necesaria para 10 paquetes, lo cual obtuvimos anteriormente:

$$Caramelos\ para\ 20\ paquetes = Caramelos\ para\ 10\ paquetes + Caramelos\ para\ 10\ paquetes$$

$$x = 80 + 80$$

$$x = 160$$

Completamos la tabla mediante las sumas:

Para 40 paquetes: 20 paquetes + 20 paquetes

Para 50 paquetes: 40 paquetes + 10 paquetes

Para 100 paquetes: 50 paquetes + 50 paquetes

Problemas de proporcionalidad directa: tablas y enunciados

Actividad 1

Actividad 1

Completá la siguiente tabla teniendo en cuenta que todos los paquetes tienen la misma cantidad de lápices. Anotá cómo pensaste para completar cada casilla.

Cantidad de paquetes	3	7	10	13	23
Cantidad de lápices	54	126			

Intencionalidad de la actividad

A partir de este punto se pretende reforzar el razonamiento aditivo compuesto, esto es notorio dado que se proporcionan dos valores iniciales, cuya suma corresponde al tercer valor que a su vez es el primer valor solicitado. De aquí en más, todos los valores se pueden obtener a partir de la suma de elementos anteriores.

Estrategia 1

Como mencionamos antes, la intención del problema es completar la tabla mediante el razonamiento aditivo compuesto, específicamente, cada valor faltante en la tabla, podemos obtenerlo mediante la suma de dos anteriores, esto es:

Para 10 paquetes: 7 paquetes + 3 paquetes

Para 13 paquetes: 10 paquetes + 3 paquetes

Para 23 paquetes: 13 paquetes + 10 paquetes

Así, para obtener la cantidad de lápices necesaria para armar 10 paquetes:

$$Lápices\ para\ 10\ paquetes: 54 + 126$$

$$Lápices\ para\ 10\ paquetes: 180$$

Se necesitan 180 lápices para armar 10 paquetes.

Para 13 paquetes:

$$Lápices\ para\ 13\ paquetes: 180 + 54$$

$$Lápices\ para\ 13\ paquetes: 234$$

Se necesitan 234 lápices para armar 13 paquetes.

Para 13 paquetes:

$$Lápices\ para\ 23\ paquetes: 234 + 180$$

$$Lápices\ para\ 23\ paquetes: 414$$

Se necesitan 414 lápices para armar 23 paquetes.

Estrategia 2

Otra estrategia para resolver el ejercicio es calcular la cantidad necesaria de lápices para armar un paquete, pero profundizaremos esto en la siguiente actividad (también se puede ver en la estrategia 1 de la actividad 3 de la sección anterior).

Actividad 2

Actividad 2

Completá la siguiente tabla que relaciona la cantidad de cajas iguales con la cantidad de reglas.

Cantidad de cajas	12	13	14	20	25	30
Cantidad de reglas	1.008	1.092				

Intencionalidad de la actividad

La intención de esta actividad es trabajar con la constante de proporcionalidad, cuya manera de obtenerla puede ser diferente: como la sustracción entre valores consecutivos (cantidad de reglas para 13 cajas y para 12 cajas), o bien, dividiendo la cantidad de reglas por la cantidad de cajas. En ambos casos, se obtiene la cantidad de reglas por cada caja (valor unitario). Una vez obtenido este valor, mediante el razonamiento multiplicativo, por ejemplo, se puede completar la tabla solicitada.

Estrategia 1

Al analizar las cantidades presentes en la tabla, podemos ver que las estrategias que hasta el momento se trabajaron (razonamiento inter, razonamiento multiplicativo o razonamiento aditivo compuesto) no son suficientes para poder completar la tabla presentada. Por ello, una posible estrategia será trabajar con la constante de proporcionalidad.

Para esto, consideramos cualquier par ordenado para calcular la constante de proporcionalidad, por ejemplo, consideremos la información proporcionada para 13 cajas. La calculamos mediante el cociente de la cantidad de reglas necesarias y la cantidad de cajas:

$$Constante\ de\ proporcionalidad: \frac{1.092}{13} = 84$$

De lo anterior, podemos decir que para armar 1 caja necesitamos 84 reglas, esto se puede comparar verificando cuántas reglas se necesitan para armar 12 cajas, lo cual debiera coincidir con el valor 1.008 presentado en la tabla.

$$Cantidad\ de\ reglas\ necesarias\ para\ 12\ cajas: Cantidad\ necesaria\ para\ 1\ caja\ \cdot 12\ cajas$$

$$Cantidad\ de\ reglas\ necesarias\ para\ 12\ cajas: 84 \cdot 12$$

$$= 1.008$$

Lo que quiere decir que el valor de la unidad calculado anteriormente es correcto, por lo tanto, podemos utilizarlo para calcular los valores restantes en la tabla, por ejemplo:

Para 20 cajas:

$$Cantidad\ de\ reglas\ necesarias\ para\ 20\ cajas: Cantidad\ necesaria\ para\ 1\ caja\ \cdot 20\ cajas$$

$$Cantidad\ de\ reglas\ necesarias\ para\ 20\ cajas: 84 \cdot 20$$

$$= 1.680$$

Mediante este procedimiento, podemos completar la tabla solicitada:

Cantidad de cajas	12	13	14	20	25	30
Cantidad de reglas	1.008	1.092	1.176	1.680	2.100	2.520

Actividad 3

Actividad 3

Completá las siguientes tablas. En cada caso, las cajas tienen la misma cantidad de cada golosina. Anotá cómo pensaste para completar cada casilla.

Cantidad de cajas	5	10	20	40	50	100
Cantidad de caramelos	40					

Cantidad de cajas	3	10	20	30	50	100
Cantidad de chupetines	930					

Estrategia 1

Notemos que tenemos dos tablas muy similares, sin embargo, en la primera tabla, cada uno de los valores solicitados corresponde a múltiplos del primer elemento, lo que nos permite trabajar mediante razonamiento inter, ya que:

- 10 corresponde al doble de 5.
- 20 corresponde al cuádruple de 5, es decir, 4 veces 5.
- 40 corresponde a 8 veces 5.
- 50 corresponde a 10 veces 5.
- 100 corresponde a 20 veces 5.

Por lo tanto, podemos calcular cada valor de la tabla 1 mediante estas multiplicaciones:

Para 10 cajas:

$$Caramelos\ para\ 10\ cajas: 2 \cdot Caramelos\ para\ 5\ cajas$$

$$= 80\ caramelos$$

Para 20 cajas:

$$Caramelos\ para\ 10\ cajas: 4 \cdot Caramelos\ para\ 5\ cajas$$

$$= 160\ caramelos$$

Mediante este procedimiento, podemos completar la tabla:

Cantidad de cajas	5	10	20	40	50	100
Cantidad de caramelos	40	80	160	320	400	800

Para completar la segunda tabla, de igual manera se puede trabajar mediante razonamiento inter, sin embargo, esto implica:

1) Con base en el dato brindado para las 3 cajas, calcular la cantidad de caramelos para 30 cajas.
2) Luego, a partir de 30 cajas dividir entre 3 para calcular la cantidad de caramelos para 10 cajas.
3) Finalmente, a partir de 10 podemos calcular los demás valores solicitados.

Esta estrategia es válida y similar a la de la tabla anterior. Por tanto, en esta ocasión, se utilizará la reducción a la unidad para encontrar la constante de proporcionalidad.

Para calcular la cantidad de chupetines necesaria para una caja, dividimos la cantidad de chupetines de 3 cajas entre 3, esto es:

$$Constante\ de\ proporcionalidad: \frac{930}{3} = 310$$

Para cada caja se necesitan 310 chupetines, por lo que, para calcular la cantidad de chupetines necesarias para 10 cajas, se multiplica 310 por 10.

$$Chupetines\ para\ 10\ cajas: Chupetines\ para\ 1\ caja \cdot 10$$

$$= 310 \cdot 10$$

$$= 3.100$$

Ahora, para calcular los chupetines de 20 cajas:

$$Chupetines\ para\ 20\ cajas: Chupetines\ para\ 1\ caja \cdot 20$$

$$= 310 \cdot 20$$

$$= 6.200$$

Así, completamos la tabla de la siguiente forma:

Cantidad de cajas	3	10	20	30	50	100
Cantidad de chupetines	930	3.100	6.200	9.300	15.500	31.000

Proporcionalidad directa: las propiedades y la constante de proporcionalidad

Actividad 1

Actividad 1

Completá la siguiente tabla, que relaciona la cantidad de tiempo (en horas) que marcha un auto, siempre a la misma velocidad, con la distancia (en kilómetros) que recorre.

Tiempo de marcha (horas)	1	2	3				$6\frac{1}{2}$
Distancia recorrida (kilómetros)	90			450	540	45	

Intencionalidad de la actividad

Si bien la construcción de la tabla se realiza de manera similar, por primera vez se trata con elementos fuera del conjunto de los números naturales, esta vez se incluye un número racional explícitamente en la tabla, lo que puede llevar al estudiante a considerar una dificultad adicional al momento de considerar la estrategia adecuada de resolución. (Invitamos a la lectura del material de este Programa sobre proporcionalidad en números racionales). En estos casos, el valor desconocido se encuentra en una de las magnitudes de la cual no puede encontrarse inmediatamente su factor multiplicativo, por lo cual, se tendrá que acudir a nuevas estrategias.

Estrategia 1

Se pueden combinar distintas estrategias, por ejemplo, para calcular la distancia recorrida en 2 y 3 horas se emplea el razonamiento multiplicativo, para calcular el tiempo de marcha para 450, 540 y 45 kilómetros se pueden utilizar la regla de 3 simple, finalmente para calcular la distancia correspondiente a 6 y media horas, se puede emplear el razonamiento aditivo compuesto:

Razonamiento multiplicativo

Para 2 horas de marcha:

$$Distancia\ recorrida\ en\ 2\ horas: Distancia\ recorrida\ en\ 1\ hora \cdot 2$$

$$Distancia\ recorrida\ en\ 2\ horas: 90 \cdot 2$$

$$Distancia\ recorrida\ en\ 2\ horas: 180\ km.$$

De igual forma, para 3 horas de marcha, la distancia recorrida es de 270 km.

Regla de 3 simple

Para calcular el tiempo de marcha al haber recorrido 450 km, podemos utilizar regla de 3 simple:

$$\frac{1\ hora}{90\ km} = \frac{x}{450\ km}$$

$$x = \frac{450}{90}\ horas$$

$$x = 5\ horas$$

Por lo tanto, toma 5 horas recorrer 450 kilómetros, de igual manera, podemos calcular el tiempo necesario para recorrer 540 kilómetros y 45 kilómetros.

$$\frac{1\ hora}{90\ km} = \frac{x}{540\ km}$$

$$x = \frac{540}{90}\ horas$$

$$x = 6\ horas$$

Así, para recorrer 540 km tardan 6 horas, finalmente, para recorrer 45 km:

$$\frac{1\ hora}{45\ km} = \frac{x}{45\ km}$$

$$x = \frac{45}{90}\ horas$$

$$x = \frac{1}{2}\ hora$$

Razonamiento aditivo compuesto

Finalmente, con los últimos valores calculados y mediante razonamiento aditivo compuesto podemos calcular la distancia recorrida en 6 horas y media:

$$Distancia\ recorrida\ en\ 6\ \frac{1}{2}\ horas\ = Distancia\ recorrida\ en\ 6\ horas + Distancia\ recorrida\ en\ \frac{1}{2} hora$$

$$x = 540\ km + 45\ km$$

$$x = 585\ km$$

Así, la tabla se construye de la siguiente manera:

Distancia recorrida (km)	1	2	3	5	6	$\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$
Tiempo (horas)	90	180	270	450	540	45	585

Estrategia 2

Para obtener la cantidad de horas (tiempo) de la distancia recorrida de 2 y 3 kilómetros puede usarse la estrategia que se mencionó anteriormente. Ahora bien, para saber la distancia recorrida para 450 horas, una estrategia puede ser preguntarse cuál es el factor multiplicativo entre 450 y 90 horas. Al realizar la división de 450 entre 90, obtenemos que 5 es el factor multiplicativo, por lo cual, 450 horas corresponde a 5 kilómetros. Misma estrategia puede usarse para 540 o 45 horas, siendo respectivamente 6 kilómetros y medio kilómetro.

Actividad 2

Actividad 2

Rocío sale todos los sábados a andar en bicicleta y siempre va a la misma velocidad: recorre 4 km cada media hora.

a. ¿Cuánto tarda en recorrer 2 km? ¿Y 8 km?

....

b. Encontrá también el tiempo que tarda en recorrer 12 km, 16 km, 10 km y 26 km.

....

c. Si un sábado anduvo 2 horas y media, ¿Cuántos kilómetros recorrió?

....

Si te sirve, podés usar esta tabla para organizar los datos y resultados que vayas obteniendo.

Distancia recorrida (kilómetros)							
Tiempo (horas)							

Intencionalidad de la actividad

En este punto es más notorio el trabajo con el conjunto de los números racionales. Además existe la posibilidad de confusión debido a la inclusión de números mixtos, lo que puede entenderse erróneamente como un producto entre un entero y una fracción. Se recomienda que, en dado caso de que las y los estudiantes aún tengan dificultades con las propiedades de la proporcionalidad directa, se recuperen actividades de grados anteriores para consolidarlas y, posteriormente, incorporar la dificultad que podría generar el nuevo campo numérico, o bien, plantearse dentro de la intencionalidad lidiar con ambos procesos de manera conjunta. Es decir, debe hacerse conciencia de que el trabajo con racionales en proporcionalidad es un trabajo integrado (invitamos a leer el material relativo a este tópico matemático de este mismo programa).

Estrategia 1

La intencionalidad de la actividad a) corresponde a emplear el razonamiento inter, es decir, al doble le corresponde el doble, a la mitad le corresponde la mitad. Notemos también que precisamente de esta manera se comportan los dos valores solicitados con la información brindada en el enunciado, es decir, al doble de 4 (8) y a la mitad de 4 (2), sabiendo esto, se puede encontrar cuánto tiempo tarda en recorrer 2 km y 8 km.

Si recorre 2 km: ya que es la mitad de la distancia proporcionada en el enunciado, el tiempo que debe tomarle recorrer estos 2 km también debe ser la mitad (recordar que el enunciado dice que va siempre a la misma velocidad, aunque puede ser un tema de debate en el aula), por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\ hora : 2 = \frac{1}{4}\ hora$$

Por lo tanto, recorrer 2 km le toma a Rocío $\frac{1}{4}$ de hora, o lo que es lo mismo, 15 minutos, o lo que es lo mismo, la mitad de media hora.

De igual forma, al doble de la distancia le corresponde el doble de tiempo:

$$\frac{1}{2}\ hora\ \cdot 2 = 1\ hora$$

Así, le toma 1 hora recorrer 8 kilómetros a Rocío.

Estrategia 2

Para encontrar el tiempo que tarda en recorrer 12, 16, 10 y 26 km, podemos emplear razonamiento aditivo compuesto de la siguiente forma:

- 12 km = 4 km + 8 km □ Tiempo de 12 km = Tiempo de 4 km + Tiempo de 8 km
- 16 km = 12km + 4 km □ Tiempo de 16 km = Tiempo de 12 km + Tiempo de 4 km
- 10 km = 2 km + 8 km □ Tiempo de 10 km = Tiempo de 2 km + Tiempo de 8 km
- 26 km = 10 km + 16 km □ Tiempo de 26 km = Tiempo de 10 km + Tiempo de 16 km

Lo anterior se expresa de la siguiente forma:

Para 12 km:

$$Tiempo = \frac{1}{2}\ hora +\ 1\ hora$$

$$Tiempo = 1\,\frac{1}{2}\ horas$$

Para 16 km:

$$Tiempo = 1\,\frac{1}{2}\ hora + \frac{1}{2}\ hora$$

$$Tiempo = 2\ horas$$

Para 10 km:

$$Tiempo = \frac{1}{4}\ hora + \ 1\ hora$$

$$Tiempo = 1\,\frac{1}{4}\ horas$$

Para 26 km:

$$Tiempo = 1\,\frac{1}{4}\ hora + \ 2\ horas$$

$$Tiempo = 3\,\frac{1}{4}\ horas$$

De esta forma, podemos expresar todos estos valores en una tabla:

Distancia recorrida (kilómetros)	2	4	8	10	12	16	26
Tiempo (horas)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\,\frac{1}{4}$	$1\,\frac{1}{2}$	2	$3\,\frac{1}{4}$

Estrategia 3

Podemos trabajar la actividad mediante razonamiento aditivo compuesto, ya que anteriormente calculamos la distancia que logra recorrer Rocío en 1 hora, 2 horas y $\frac{1}{2}$ hora, específicamente utilizaremos el cálculo de la distancia recorrida en dos horas, ya que la información de media hora fue proporcionada en el enunciado.

Debido a que la relación es proporcional, podemos calcular la distancia recorrida en 2 horas y media de la siguiente forma:

$$Distancia\ de\ 2\,\frac{1}{2}\ horas = Distancia\ de\ 2\ horas + Distancia\ de\ \frac{1}{2}\ hora$$

Por lo tanto:

$$Distancia\ de\ 2\ \frac{1}{2}\ horas = 4\ km + 16\ km$$

$$Distancia\ de\ 2\ \frac{1}{2} = 20\ km$$

Así, la distancia recorrida en 2 horas y media corresponde a 20 kilómetros.

Actividad 3

Actividad 3

Completá las siguientes tablas de proporcionalidad directa.

Cantidad de cajones	1	2	4	5		
Cantidad de latas	12				120	240

Cantidad de cajas	5	10	20	40		
Cantidad de caramelos	40				160	400

Tiempo de marcha (horas)	5	15	20	50	200	1.000
Distancia recorrida (kilómetros)	45					

Estrategia 1

Para resolver la primera tabla, podemos ver que se proporciona el valor de la constante de proporcionalidad, es decir, la cantidad de latas que contiene un cajón. Con este dato, se puede completar la tabla en primera instancia mediante razonamiento multiplicativo, es decir, multiplicando a cada valor de la cantidad de cajones por 12, que es la cantidad de latas que tendrá cada cajón (para 2, 4 y 5 cajones; 24, 48 y 60 latas, respectivamente).

Ahora bien, para calcular la cantidad de cajones correspondientes a 120 y 240 latas se puede calcular mediante razonamiento inter, ya que 120 latas corresponde al doble de 60 latas, además, 240 latas corresponde a 4 veces 60 latas, o bien, al doble de 120 latas:

$$Cantidad\ de\ cajones\ para\ 120\ latas: Cantidad\ de\ cajones\ para\ 60\ latas\ \cdot 2$$

$$Cantidad\ de\ cajones\ para\ 120\ latas: 5\ \cdot 2$$

$$Cantidad\ de\ cajones\ para\ 120\ latas: 10$$

También, para 240 latas:

$$Cantidad\ de\ cajones\ para\ 240\ latas: Cantidad\ de\ cajones\ para\ 120\ latas\ \cdot 2$$

$$Cantidad\ de\ cajones\ para\ 240\ latas: 10\ \cdot 2$$

$$Cantidad\ de\ cajones\ para\ 240\ latas: 20$$

Así, la tabla queda construida de la siguiente forma:

Cantidad de cajones	1	2	4	5	10	20
Cantidad de latas	12	24	48	60	120	240

Estrategia 2

Si bien el razonamiento inter se utilizó para completar la tabla 1, las tablas 2 y 3 se pueden completar en su totalidad mediante el mismo razonamiento, así, las tablas se pueden construir de la siguiente manera:

x2 x2 x2

Cantidad de cajas	5	10	20	40	20	50
Cantidad de caramelos	40	80	160	320	160	400

= x5

x4 x3

Tiempo de marcha (horas)	5	15	20	50	200	1.000
Distancia recorrida (km)	45	135	180	450	1.800	9.000

x10 x4 x5

Es importante destacar que es esperable considerar contextos reales y/o creíbles en los ejercicios, considerando la última tabla, se debe mencionar que es irreal que una persona mantenga un ritmo de marcha constante durante 1.000 horas, tiempo equivalente a poco más de 41 días. La poca veracidad del contexto puede provocar en el o la estudiante que considere información que no interviene propiamente en la proporcionalidad.